Занятие 22.

Определение 1. *Целой частью* числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Обозначение: $[x]$.

Определение 2. *Дробной частью* числа x называется разность числа и его целой части. Обозначение: $\{x\} = x - [x]$.

Принцип Архимеда. Для любых чисел a и b таких, что $0 < a < b$ существует такое натуральное n, что $n \cdot a > b$.

Пример 1. Чему равны $[\sqrt{14}]$, $\{\frac{214}{13}\}$ и $[\frac{1}{\sqrt{57}+5}]$?

Пример 2. Построить график функции $y = [x]$.

Пример 3. Доказать неравенство $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$.

Задача 1. Построить график функции а) $y = \{x\}$; б) $y = \{x\}^2 - 1$.

Задача 2. Найдите все числа по модулю меньшие своей целой части.

Задача 3. Пусть a - положительное число, a d - натуральное. Докажите, что а) $[\frac{a}{d}] = [\frac{[a]}{d}]$; б) количество натуральных чисел, не превосходящих a и делящихся на d, равно $[\frac{a}{d}]$.

Задача 4. Найдите наименьшее положительное x, удовлетворяющее неравенству $[x]\{x\} \geq 3$.

Задача 5. Решите уравнения: а) $[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1$; б) $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$; в) в натуральных числах $[\frac{x}{10}] = [\frac{x}{11}] + 1$.

Задача 6. Докажите неравенство $[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x + y]$.

Задача 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + [y] + z = 3.9 \\ y + [z] + x = 3.5 \\ z + [x] + y = 2 \end{cases}$

Математический кружок МЦНМО. 8 класс. 21 марта 2015

Занятие 22.

Определение 1. *Целой частью* числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Обозначение: $[x]$.

Определение 2. *Дробной частью* числа x называется разность числа и его целой части. Обозначение: $\{x\} = x - [x]$.

Принцип Архимеда. Для любых чисел a и b таких, что $0 < a < b$ существует такое натуральное n, что $n \cdot a > b$.

Пример 1. Чему равны $[\sqrt{14}]$, $\{\frac{214}{13}\}$ и $[\frac{1}{\sqrt{57}+5}]$?

Пример 2. Построить график функции $y = [x]$.

Пример 3. Доказать неравенство $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$.

Задача 1. Построить график функции а) $y = \{x\}$; б) $y = \{x\}^2 - 1$.

Задача 2. Найдите все числа по модулю меньшие своей целой части.

Задача 3. Пусть a - положительное число, a d - натуральное. Докажите, что а) $[\frac{a}{d}] = [\frac{[a]}{d}]$; б) количество натуральных чисел, не превосходящих a и делящихся на d, равно $[\frac{a}{d}]$.

Задача 4. Найдите наименьшее положительное x, удовлетворяющее неравенству $[x]\{x\} \geq 3$.

Задача 5. Решите уравнения: а) $[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1$; б) $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$; в) в натуральных числах $[\frac{x}{10}] = [\frac{x}{11}] + 1$.

Задача 6. Докажите неравенство $[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x + y]$.

Задача 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + [y] + z = 3.9 \\ y + [z] + x = 3.5 \\ z + [x] + y = 2 \end{cases}$