Занятие 27.

Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}, ...$ Тогда для этого достаточно доказать следующие два утверждения:
1) Первое утверждение верно. (База индукции)
2) Если верно утверждение P_n, то верно утверждение P_{n+1}. (Предположение индукции $\Rightarrow$ Шаг индукции)

Пример 1. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы у одной из частей вся борода окажется снаружи. *(Индукция по числу прямых)*

Пример 2. На плоскости проведены n прямых. Докажите, что получившиеся области можно раскрасить в два цвета (черный и белый) так, что соседние будут раскрашены в разные цвета. (Соседними областями называются те, которые имеют общую границу, состоящую из более чем одной точки.) *(Индукция по числу прямых)*

Пример 3. В прямоугольнике $3\times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов. *(Индукция по числу столбцов)*

Пример 4. (Ханойские башни) Имеются три стержня - два пустых, а на третий надета пирамида из а) трех; б) четырех; в) пяти; г) n колец различного диаметра (кольца нанизаны в порядке уменьшения диаметра снизу вверх). Требуется переместить всю башню на соседний стержень, каждый раз перенося только одно кольцо и не помещая большее кольцо на меньшее. *(Индукция по числу колец)*

Задача 1. а) На столе стоят восемь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды. б) А можно ли этого добиться, если стаканов 2^n?

Задача 2. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из этих машин может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

Задача 3. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

Задача 4. Разобьём все натуральные числа на группы так, чтобы в первой группе было одно число, во второй — два, в третьей — три и т.д. Можно ли это сделать таким образом, чтобы из суммы чисел в каждой группе нацело извлекался корень пятой степени?

Задача 5. Даны натуральные числа $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$. Докажите, что число $(x_1^2+y_1^2)\cdot$ $\cdot(x_2^2+y_2^2)\cdot ... \cdot(x_n^2+y_n^2)$ можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Задача 6. N разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\frac{1}{N}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

Задача 7. Некоторые из N точек соединены отрезками. Докажите, что в вершины полученного графа можно поставить натуральные числа так, что ребром будут соединены только те, у которых НОД не равен 1.

Следующее занятие состоится 16 мая 2015 года.