Математический кружок МЦНМО. 8 класс. 16 мая 2015

Занятие 28.

Метод математической индукции является удобным средством для доказательства различных тождеств и неравенств, зависящих от натурального параметра.

Пример 1. Докажите равенство $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Пример 2. Докажите равенство $1+3+...+(2n-1)=n^2$.

Пример 3. Докажите неравенство $2^n>n$.

Задача 1. Докажите тождества: а) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; б) $\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+...+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=$ $=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$; в) $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{6}+...+\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{24}$; г) $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Задача 2. Последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n...$ такова, что $a_1=3$, $a_2=5$, а $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$ при $n>2$. Докажите, что $a_n=2^n+1$ при любом натуральном n.

Задача 3. Докажите, что а) $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9; б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

Задача 4. Пусть число $x+\frac{1}{x}$ - целое. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ - тоже целое.

Задача 5. Докажите неравенство $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$.

Задача 6. (Неравенство Бернулли) $(1+x)^n>1+nx$ при $x>-1$ и $x\neq 0$.

Задача 7. Докажите неравенство $\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при натуральном n.

Задача 8. Найдите сумму $1^2+3^2+...+(2n-1)^2$.

Математический кружок МЦНМО. 8 класс. 16 мая 2015

Занятие 28.

Метод математической индукции является удобным средством для доказательства различных тождеств и неравенств, зависящих от натурального параметра.

Пример 1. Докажите равенство $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Пример 2. Докажите равенство $1+3+...+(2n-1)=n^2$.

Пример 3. Докажите неравенство $2^n>n$.

Задача 1. Докажите тождества: а) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; б) $\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+...+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=$ $=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$; в) $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{6}+...+\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{24}$; г) $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Задача 2. Последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n...$ такова, что $a_1=3$, $a_2=5$, а $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$ при $n>2$. Докажите, что $a_n=2^n+1$ при любом натуральном n.

Задача 3. Докажите, что а) $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9; б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

Задача 4. Пусть число $x+\frac{1}{x}$ - целое. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ - тоже целое.

Задача 5. Докажите неравенство $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$.

Задача 6. (Неравенство Бернулли) $(1+x)^n>1+nx$ при $x>-1$ и $x\neq 0$.

Задача 7. Докажите неравенство $\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6...2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при натуральном n.

Задача 8. Найдите сумму $1^2+3^2+...+(2n-1)^2$.