Занятие 29.

Пример 1. Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?

Пример 2. Петя загадал число от 1 до 15. Вася задает ему вопросы, на которые тот может отвечать «да» или «нет». Может ли Вася отгадать число, задав а) 4 вопроса; б) 3 вопроса?

Задача 1. Первоначально на доске написано натуральное число N. Разрешается прибавить к нему один из его делителей, отличных от него самого и единицы. С полученным числом разрешается проделать аналогичную операцию, и т. д. а) Докажите, что для любого составного числа N, на доске будут появляться только составные числа. б) Докажите, что из числа N=4 можно с помощью таких операций прийти к любому наперёд заданному составному числу.

Задача 2. Клетки квадрата 8×8 раскрашены в два цвета: черный и белый. Можно любой прямоугольник 1×3 перекрашивать в преобладающий в нем цвет. Доказать, что такими операциями можно сделать весь квадрат одноцветным.

Задача 3. Вычислительная машина умеет выполнять только одну операцию: $a \otimes b = 1 - \frac{a}{b}$. Как выполнить с помощью этой машины все четыре арифметических действия?

Задача 4. Неуловимый Джо никогда не проигрывает на рулетке больше четырех раз подряд и никогда не ставит больше 10 долларов. Как ему выиграть 1000 долларов? (В случае выигрыша на рулетке возвращается удвоенная ставка; вначале Джо имеет 100 долларов.)

Задача 5. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?

Задача 6. Даны n карточек; на обеих сторонах каждой карточки написано по одному из чисел 1, 2,..., n, причём так, что каждое число встречается на всех n карточках ровно два раза. Доказать, что карточки можно разложить на столе так, что сверху окажутся все числа: 1, 2,..., n.

Задача 7. В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности: а) набор цифр 1234; 3269; б) вторично набор 1975; в) набор 8197?

Задача 8*. От каждой стороны квадрата осталось по одной точке. Восстановите квадрат.