Счет и вычисления — основа порядка в голове.

Комбинаторика и факториалы

Факториалом числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до числа n включительно: n! = 1 • 2 • 3 … • n. Принято, что 0! = 1.

Число перестановок из n элементов равно факториалу. Рассмотрим следующую задачу: 6 карточек пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Карточки наугад выкладываем в ряд. Сколько при этом можно получить различных шестизначных чисел?

Решение. На первое место можно положить одну из 6 карточек. Для этого есть 6 способов. В каждом из этих 6 способов на второе место можно положить одну из оставшихся 5 карточек. Таким образом, существует 5 • 6 =30 способов, чтобы положить карточки на первое и второе места. В каждом из этих 30 способов на третье место можно положить одну из оставшихся 4 карточек. Следовательно, существует 4 • 5 • 6 = 120 способов, чтобы положить карточки на первое, второе и третье места. И так далее, пока не останется одна карточка. Таким образом, при выкладывании карточек можно получить 6! = 720 шестизначных чисел.

Иногда нас может интересовать количество способов расположить не все n элементов, а только несколько из них. Тогда цепочка из предыдущего рассуждения оборвется на k-том шаге, а не дойдет до единицы.

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\ \text{множителей}}$$

Это **число размещений** k элементов из n можно более коротко записать: $\frac{n!}{(n-k)!}$
(Проверьте, что дробь сокращается до нужного произведения!)

Факториалы:

1. Вычислите: а) $\frac{24!\cdot 50!}{25!\cdot 49!}$ б) $\frac{40!}{38!\cdot 5!}$ в) $\frac{7!+6!}{5!}$ г) $\frac{8!-6!}{55}$ д) $\frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{5!\cdot 3!}-\frac{9!}{7!\cdot 2!}\right)$

2. Упростите выражения: а) $\frac{10!}{n\cdot(n+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{8!}$ б) $n!\cdot\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$

3. Решите уравнения: а) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=72$ б) $\frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{6}$

4. Объясните, как найти бесконечно много x, y и z, которые больше 1, и удовлетворяют условию $x!\cdot y!=z!$

5. Сколько раз можно разделить число 10! на 2 нацело? (каждый следующий раз мы делим результат предыдущего действия, а не 10!)

6.Сколько раз можно разделить число 100! на 10 нацело?

Счет и вычисления — основа порядка в голове.

Комбинаторика-2:

Ответы можно и нужно оставлять в виде факториалов, где это возможно. Не стоит подсчитывать, сколько именно будет 8! 40320, но это не принципиально.

1. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?
2. Сколько различных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если ни одна из цифр не будет повторяться? (число с нуля начинаться не может)
3. На танцплощадке собрались N юношей и N девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?
4. Код для сейфа фирмы Невлезайубьет должен состоять из десяти различных цифр и 33 различных букв. Богач Скуперфильд, опасаясь за свои сокровища, каждый день выбирает новый (т.е. такой, которого еще ни разу не было) код к своему сейфу. На протяжении скольких дней он сможет это делать?
5. В футбольной команде 2 нападающих, 4 полузащитника, 4 защитника и 1 вратарь. Сколькими способами можно построить их в ряд так, чтобы первым стоял вратарь, за ним стояли защитники, за ними — полузащитники, и в конце — нападающие?
6. Человек забыл две последние цифры в семизначном телефонном номере, помнит только, что все цифры номера были неодинаковые. Сколько телефонных номеров ему придется опробовать, чтобы дозвониться?