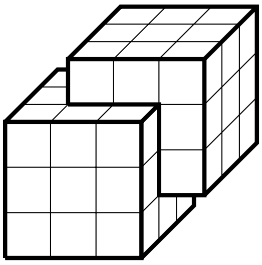
Включение–исключение

Задача 0 (разминка). Можно ли расставить часовых вокруг небольшого объекта так, чтобы ни к объекту, ни к часовым нельзя было подобраться, если часовой стоит неподвижно и видит на 100 м строго вперед? (И объект, и часовых можно считать точками.)

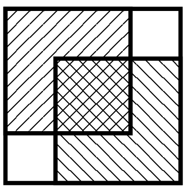
Задача 1. В саду у Ани и Вити росло 2016 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. Оказалось, что ровно 3 куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько кустов остались не политыми?

Задача 2. Сколько кубиков нужно, чтобы сложить «два пересекающихся куба» на картинке?



Задача 3. Сколько несократимых среди дробей $\frac{6}{100}, \frac{6}{101}, \frac{6}{102}, \ldots, \frac{6}{999}$?

Задача 4. Сумма площадей двух заштрихованных квадратов равна площади большого квадрата. Докажите, что сумма площадей двух маленьких белых квадратов равна площади центрального (заштрихованного дважды) квадрата.



Включение–исключение (продолжение)

Задача 5. Куб со стороной 20 разбит на единичные кубики, и в каждом кубике записано число. В каждом столбике из 20 кубиков (рассматриваются столбики всех трех направлений) сумма чисел равна 1. В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

Задача 6. В комнате площади 6 постелили три ковра, каждый площади 3. Докажите, что площадь пересечения каких-то двух ковров не меньше 1.

Задача 7. Сколько натуральных чисел из первой тысячи взаимно просты с (т. е. не имеют общих делителей с) числом 1001?

Задача 8. Костя, Лёша и Ваня решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил по 60 задач. Назовем задачу *трудной*, если ее решил только один человек, и *легкой*, если ее решили все трое. На сколько трудных задач было больше, чем легких?

Задача 9*. В классе N учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?