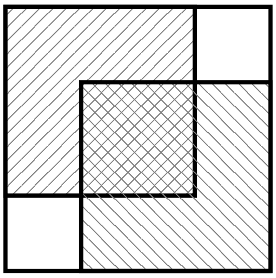
Иррациональность $\sqrt{2}$

▷ **Задача 4.** Сумма площадей двух заштрихованных квадратов равна площади большого квадрата. Докажите, что сумма площадей двух маленьких белых квадратов равна площади центрального (заштрихованного дважды) квадрата.



▷ Многие слышали, что $\sqrt{2}$ — число *иррациональное*. Это означает, что не существует дроби a/b, равной $\sqrt{2}$, т. е. такой, что $(a/b)^2 = 2$. Оказывается, конструкция из задачи выше позволяет легко доказать этот факт!

▷ Предположим, что все-таки нашлась дробь a/b, такая что $(a/b)^2 = 2$. Это означает, что есть два целых числа, a и b, квадраты которых отличаются вдвое: $a^2 = 2b^2$. Нарисуем на клетчатой бумаге большой квадрат со стороной a, а внутри него разместим два квадрата со стороной b как на рисунке выше.

Но теперь пользуясь утверждением задачи мы получаем *меньшие* квадраты с таким же свойством: площадь заштрихованного дважды квадрата вдвое больше площади маленького белого квадрата!

Эту процедуру мы можем повторять сколько угодно раз — что абсурдно: стороны квадратов являются целыми числами и не могут постоянно уменьшаться. Значит, исходное предположение неверно и $\sqrt{2}$ не может быть представлено в виде дроби.

▷ Вопросы для дальнейших размышлений:

а) как в том же духе доказать иррациональность $\sqrt{3}$ (или еще каких-то чисел)?

б) как изложить доказательство выше на чисто алгебраическом языке?