

# Арифметика остатков

Определение 1. Число  $a$  делится на число  $b$ , если существует число  $c$  такое, что  $a=cb$ .

Определение 2. Остатком числа  $a$  при делении на  $b$  называют число  $r$ , такое  $0 \leq r < b$ ,  $a-r$  делится на  $b$ . Также  $r$  называют остатком числа  $a$  по модулю  $b$ .

Имеет место представление  $a = kb + r$ ,  $k$  — неполное частное.

Определение 3. Пусть  $m > 1$ . Два числа  $a$  и  $b$  называются **сравнимыми по модулю  $m$** , если у них одинаковые остатки по модулю  $m$ . Обозначение:  $a \equiv b \pmod{m}$ .

Свойства сравнений.

1)  $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

2) Если  $a \equiv b$  и  $b \equiv c$ , то  $a \equiv c \pmod{m}$

Если  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $c \equiv d \pmod{m}$ , то

3)  $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ ;

4)  $ac \equiv bd \pmod{m}$ .

Лемма: 1)  $a + b \equiv a \pmod{m} + b \pmod{m}$  2)  $ab \equiv (a \pmod{m}) * b \pmod{m}$

Упражнение: докажите, что  $(km+r)^n \equiv r^n \pmod{m}$ .

Пример 1: Найдите остаток числа  $13^{100}$  по модулю 4.

Решение:  $13 \equiv 1 \pmod{4}$ , значит  $13^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod{4}$ .

Пример 2: Найдите остаток числа  $12^{100}$  по модулю 13.

Решение:  $12 \equiv -1 \pmod{13}$ , значит  $12^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1 \pmod{13}$ .

Пример 3: Докажите, что  $(n^3 - n) : 6$  при любых целых  $n$ .

Решение: Поскольку выражение  $(n^3 - n)$  интересует нас по модулю 6, то  $n$  можно заменить на его остаток. Разберем все варианты:

- $n \equiv 0$  :  $(n^3 - n) \equiv 0 \pmod{6}$ ;
- $n \equiv 1$  :  $(n^3 - n) \equiv 1^3 - 1 \equiv 0 \pmod{6}$ ;
- $n \equiv 2$  :  $(n^3 - n) \equiv 2^3 - 2 \equiv 8 - 2 \equiv 0 \pmod{6}$ ;
- $n \equiv 3$  :  $(n^3 - n) \equiv 3^3 - 3 \equiv 27 - 3 \equiv 0 \pmod{6}$ ;
- $n \equiv -2$  :  $(n^3 - n) \equiv (-2)^3 + 2 \equiv -8 + 2 \equiv 0 \pmod{6}$ ;
- $n \equiv -1$  :  $(n^3 - n) \equiv (-1)^3 + 1 \equiv 0 \pmod{6}$ ;
- 

1. Докажите, что  $6^{2n+1} + 1 : 7$  для любого натурального  $n$ .

2. Докажите, что  $21^{2015} - 1 : 20$ .

3. Докажите, что  $30^{99} + 61^{100} : 31$ .

4. Найдите последнюю цифру числа  $239^{100} \times 1514^{101} \times 2086^{102}$ .

5. Докажите, что  $19^{100} - 1 : 45$ .

6. Докажите, что  $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + \dots + 100^{99} : 101$

7. Докажите признак делимости на 11.

8. Докажите, что  $n^{100} - 2$  не делится на 3 при любом  $n$ .

9. Докажите, что  $mn(m+n)$  — четное число.

10. Докажите, что  $n^5 - n : 10$ .

11. Докажите, что  $n^3 + 5 \cdot n : 6$ .

12. Докажите, что если  $x^2 + y^2 : 7$ , то  $x : 7$  и  $y : 7$ .