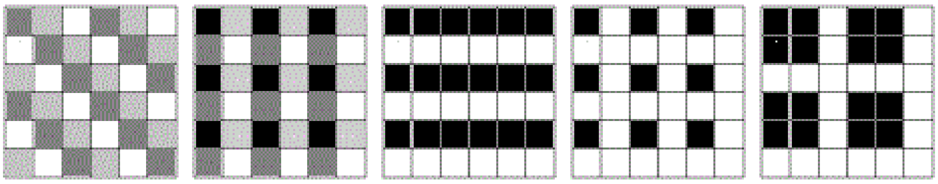
Раскраски

При решении задач этого занятия (и в будущем) вам пригодится уже знакомая вам шахматная раскраска, а также следующие двухцветные и многоцветные раскраски:



Задача 1. а) Можно ли разбить квадрат 8×8 с отрезанным уголком на прямоугольники 1×3?

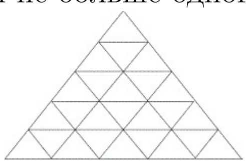
б) Можно ли доску размером 10×1 клеток разрезать на фигурки в форме буквы Т из четырёх клеток?

в) Можно ли доску 10×10 разрезать на фигурки из четырёх клеток в форме буквы Г?

г) В квадрате 2018×2018 вырезали верхнюю левую клетку и нижнюю правую. Можно ли полученную фигуру разбить на доминошки?

Задача 2. Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

Задача 3. Треугольник разбит на треугольнички (25 штук), как показано на рисунке. Жук может ходить по треугольнику, переходя между соседними (по стороне) треугольничками. Какое максимальное количество треугольничков может пройти жук, если в каждом он побывал не больше одного раза?



Задача 4. В центре куба $3 \times 3 \times 3$ сидит жук. Доказать, что он, переползая через ребра, не сможет обойти все кубики $1 \times 1 \times 1$ по одному разу.

Раскраски, добавка

Задача 1. Из листа клетчатой бумаги размером 17×17 клеточек вырезали 35 квадратиков 2×2 (режут по линиям). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

Задача 2. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

Задача 3. Прямоугольный участок размера $m \times n$ разбит на квадраты 1×1. Каждый квадрат является отдельным участком, соединенным калитками с соседними участками. При каких размерах участка можно обойти все квадратные участки, побывав в каждом по одному разу, и вернуться в первоначальный?

Задача 4*. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

Указание. Раскрасьте клетки в 4 цвета так, чтобы никакие две клетки одного цвета не соприкасались.

Задача 5. Раскрасьте рисунок в четыре цвета так, чтобы соседние части были покрашены в разные цвета. Можно ли обойтись тремя цветами?