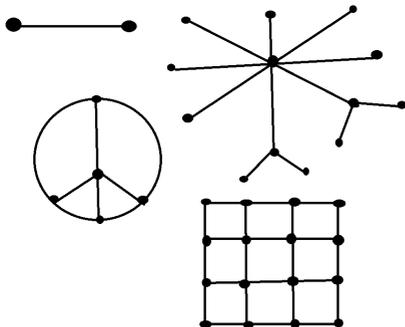


Графы

Задача 1. Найдите на картинке графы и укажите чётности их вершин.



Задача 2. Докажите а) лемму о рукопожатиях и б) её следствие из листочка с определениями. (Подсказка: как изменится сумма степеней, если убрать одно ребро?)

Задача 3. Пройдёмся по шагам:

- нарисуйте полный граф на 5 вершинах;
- найдите в нём цикл и простой цикл;
- выберите две вершины, сотрите между ними ребро и найдите теперь между ними путь и простой путь;
- сколько нужно стереть рёбер в полном графе, чтобы получить дерево? сотрите их;
- теперь сотрите несколько рёбер так, чтобы дерево распалось на три компоненты связности.

Задача 4. Нарисуйте дерево, после чего докажите:

- лемму о висячей вершине;
- усложнение леммы: в любом дереве найдутся две висячие вершины.
- Как связано количество рёбер и вершин в дереве? Докажите.

Графы, задачи

Задача 5. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Задача 6. В МЦНМО 208 компьютеров и 1 принтер. К главному компьютеру подсоединён только один провод, к принтеру – 37, а к каждому обычному компьютеру – по 20 проводов. Всегда ли удастся распечатать листки для кружка с главного компьютера?

Задача 7. В графе все вершины имеют степень пять. Докажите, что в нём есть цикл.

Задача 8. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?

Задача 9. В стране из любого города можно попасть в любой другой, двигаясь по дорогам (возможно, через другие города). Докажите, что можно превратить один из городов в военную базу (закрыв проезд через него) так, что из любого из оставшихся городов по-прежнему можно будет проехать в любой другой.

Задача 10. На 8 марта каждый из 10 мальчиков класса подарил по цветку 8 одноклассникам. Известно, что каждая девочка получила по 5 цветков. Сколько всего девочек? (попробуйте решить эту задачку именно через графы)

Задача 11. Нарисуйте двудольный граф, где чёрные и белые вершины — это соответственно чёрные и белые клетки доски 3×3 , а рёбра соответствуют ходу коня.

