

Инварианты

Задача 1 (разминка). а) Можно ли монетами в 14 и 35 крон заплатить без сдачи сумму в 245 крон? А в 2005 крон?

б) Можно ли разменять 55 динаров десятью монетами достоинством в 1, 3, 5 и 7 динаров? А 13-ю монетами?

в) Банкомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 77 монет? А на 100 монет?

▷ При раскрасках следят за количеством, разностью или чётностью клеток того или иного цвета.

Задача 2. На доске можно выделить любой прямоугольник, где есть клетки двух цветов, и перекрасить все клетки в нём в противоположный цвет.

а) Можно ли такими операциями доску 8×8 , покрашенную в шахматном порядке, сделать полностью белой?

б*) Можно ли не менее 55 клеток сделать белыми?

Задача 3. Можно ли разрезать прямоугольник 5×8 на буквы «Г» из 4 клеток? (Шахматная раскраска прямоугольника может оказаться чрезвычайно полезной.)

Задача 4*. В стране Серобуромалинии живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. При встрече два хамелеона разного цвета одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета? (Пусть s – число серых, a b – число бурых. Делится ли $(s-b)$ на 3?)

▷ Есть процесс – ищи инвариант! Инварианты также полезны для разных подсчётов и оценок.

Задача 5. На столе лежит 7 монет орлами вверх. За одно действие можно перевернуть две монеты. Удастся ли перевернуть все монеты решками вверх?

Задача 6. Учитель физики расставил на две чаши весов 30 гирь весом 1г, 2г, ..., 30г, причём одна из чаш была тяжелее. Каждый ученик в классе подходил к весам и снимал по гирьке, причём чаши весов всегда меняли положение. В итоге чаши остались пустыми. Какую гирьку могли снять последней?

Задача 7. Возле каждого из четырёх углов прямоугольного бассейна 10×25 стояло по спортсмену. Тренер подошёл к краю бассейна и подозвал к себе всех спортсменов. Все подошли кратчайшими путями по кромке бассейна. Известно, что трое прошли в сумме 50 метров. Сколько прошёл четвёртый?

Задача 8*. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т.д. Если у монеты два соседа лежат по-разному, ее можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом с помощью таких операций?

