

Определения

Этот листок содержит все необходимые определения и теоремы для занятий по графам. Если какое-то слово в задачках кажется вам незнакомым, его всегда можно найти здесь.

Во всех наших листках мы считаем, что в графах отсутствуют петли (рёбра, соединяющие вершину с собой) и кратные рёбра (то есть любые две вершины соединяются не более чем одним ребром).

- **Определение 1.** *Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а соединяющие линии — *рёбрами*. (Каждое ребро соединяет ровно две вершины.)
- **Определение 2.** *Степенью* (или *порядком*) вершины называется количество рёбер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *чётной*, если из нее выходит чётное число рёбер, и *нечётной*, если из неё выходит нечётное число рёбер.
- **Теорема 1. (Лемма о рукопожатиях)** Сумма степеней всех вершин графа равняется удвоенному количеству рёбер.
Следствие. Количество нечётных вершин всегда чётно.
- **Определение 3.** *Путём* в графе от вершины A до вершины B назовём такую последовательность рёбер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Если никакая вершина не встречается более одного раза, то такой путь называется *простым*.
- **Определение 4.** *Циклом* называется путь, у которого начало и конец совпадают. *Простой цикл* — цикл без повторяющихся вершин (за исключением совпадения начала и конца).
- **Определение 5.** Граф называется *полным*, если любая вершина соединяется ребром с любой другой.
- **Определение 6.** Граф называется *связным*, если для любой его вершины найдётся путь, связывающий её с любой другой вершиной графа.
- **Определение 7.** *Компонентой связности* называется наибольший связный подграф.
- **Определение 8.** Два графа называются *одинаковыми* (или, по-научному, *изоморфными*), если в них можно занумеровать вершины таким образом, что между вершинами k и m в первом графе есть ребро, если и только если оно есть между вершинами с этими же номерами в другом графе.

- **Определение 9.** Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы рёбра соединяли только пары вершин разного цвета.
- **Определение 10.** Связный граф без циклов называется *деревом*.
- **Теорема 2. (Лемма о висячей вершине)** В любом дереве найдётся вершина, из которой выходит ровно одно ребро.
- **Теорема 3.** В дереве количество вершин на одну больше количества рёбер.
- **Теорема 4.** Из любого связного графа можно сделать дерево, удалив часть рёбер. (Такое дерево называется *остовным*)
- **Теорема 5.** Из всех графов на данном наборе вершин наименьшее количество рёбер имеют деревья и только они.