Хэллоуин

Задача 1. На шабаш слетелось 666 ведьм. **a)** Там происходят выборы самой главной ведьмы и её помощницы. Сколькими способами можно их выбрать? **b)** Каждая ведьма привезла на шабаш зелье сонливости по своему уникальному рецепту. Сколькими способами можно выбрать два зелья, для того, чтобы усыпить всех людей в соседней деревне?

Определение. Количество способов выбрать из n элементов k элементов обозначается C_n^k.
Факториалом числа n называется произведение чисел от 1 до n включительно.

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать 3 тыквы из 7? А 4 тыквы?

Задача 3. Докажите, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задача 4. Из 10 вурдалаков, 15 вампиров и 6 упырей нужно выбрать команду для игры в тыквенный покер. В команде должно быть 4 вурдалаков, 6 вампиров и 3 упыря. Сколькими способами можно это сделать?

Задача 5. Докажите каждую из формул алгебраически (используя задачу 3) и комбинаторно (используя определение C_n^k):

a)

$$C_n^0 = C_n^n = 1,\ \ C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

b)

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

c)

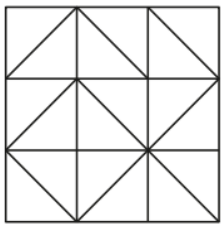
$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

d)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Задача 6. Проведены две параллельные прямые. На одной отмечено 10 точек, а на другой 15. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? А трапеций?

Задача 7. Квадрат разбит на треугольники (см. рисунок). Сколько существует способов закрасить ровно треть квадрата? Маленькие треугольники нельзя красить частично.



Дополнительные задачи

Задача 8. Сколькими способами ведьмы из первой задачи могут встать в хоровод для совершения темного ритуала?

Задача 9. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых равна 4?

Задача 10. Сколькими способами можно прочитать слово *ведьма*, двигаясь вправо или вниз?
В Е Д Ь М А
Е Д Ь М А
Д Ь М А
Ь М А
М А
А

Задача 11. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998?

Задача 12. На доске 100×100 расставлено 100 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что в правом верхнем и в левом нижнем квадратах размером 50×50 расставлено равное число ладей.

Задача 13. В сериале "Тайна Санта-Барбары" участвует 20 героев. Каждую серию происходит одно из событий: некоторый герой узнаёт Тайну, некоторый герой узнаёт, что кто-то знает Тайну, некоторый герой узнаёт, что кто-то не знает Тайну. Какое наибольшее число серий может продолжаться сериал?