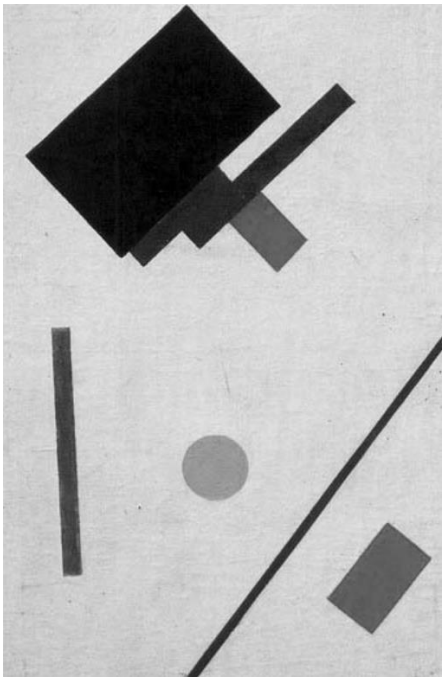
Индукция

0. (Игра "Ханойская башня") Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней.

1. Прямые делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.
2. Докажите, что любой из квадратов 2×2, 4×4, 8×8,...,$(2^n)\times(2^n)$,…, из которого вырезали угловую клетку, можно разрезать на уголки из трех клеток.
3. Докажите, что для любого $n > 2$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей с числителем 1.
4. Докажите, что:



а) $1 + 3 + 5 +...+ (2n - 1) = n^2$.

б) $1 + 2 + 3 +…+ n = n(n+1)/2$

в) $1 + 4 + 9 + … + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

5. На плоскости нарисовано несколько попарно непересекающихся окружностей (Каждая окружность пересекается с любой другой) Докажите, что эту картинку можно обвести не отрывая карандаша от бумаги, не проходя по одной дуге два раза и вернуться в ту же точку.

6. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон растут волосы. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется волосатой снаружи. (Никакие три прямые не проходят через одну точку.)

7. Кучка из n камней произвольным образом делится на две кучки, любая из имеющихся кучек снова делится на две и т. д., пока каждая кучка не будет состоять из одного камня. При каждом делении какой-либо кучки на две, записывается произведение чисел камней в получающихся двух кучках. Чему равна сумма всех записанных чисел?

Дополнительные задачи

8. Вершины выпуклого многоугольника окрасили в три цвета так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника цвета всех вершин были различны.
9. Двум гениям сообщили по натуральному числу и сказали, что эти числа отличаются на 1. После этого они по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: "Знаешь ли ты мое число?". Докажите, что рано или поздно один из них ответит положительно.
10. На концах отрезка стоят единицы. На каждом шаге между каждыми двумя соседними числами пишется их сумма. Найдите сумму всех чисел, стоящих на отрезке после n шагов.