

Графы

Задача 1.

Можно ли расположить на плоскости

- а) 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?
- б) 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?

Задача 2.

Докажите, что в любом графе

- а) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер (и следовательно, чётна);
- б) число вершин нечётной степени чётно.

Задача 3.

В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Задача 4.

Система точек, соединённых отрезками, называется *связной*, если из каждой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

Определение. *Деревом* называется связный граф без циклов.

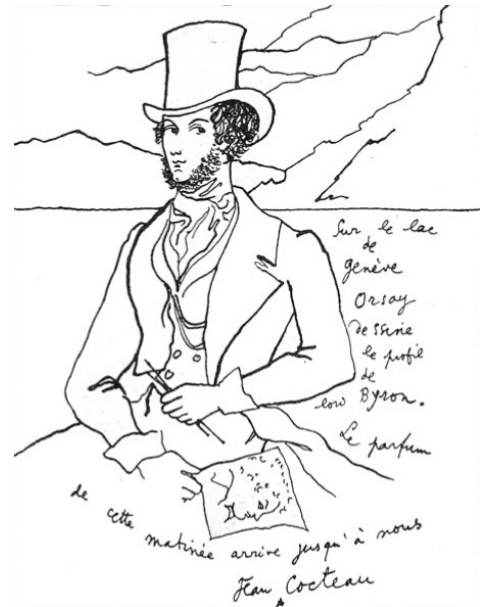
Задача 5.

Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*).

Задача 6.

Доказать, что

- а) из связного графа можно выкинуть несколько рёбер так, чтобы осталось дерево;
- б) в дереве с n вершинами ровно $n - 1$ ребро;
- в) в дереве не меньше двух висячих вершин;
- г) в связном графе из n вершин не меньше $n - 1$ ребра;
- д) если в связном графе n вершин и $n - 1$ ребро, то он – дерево.



Дополнительные задачи

Задача 7.

Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связан.

Задача 8.

Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

Задача 9.

Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 рёбер. Доказать, что он остался связным.

Задача 10.

В стране из каждого города выходит 100 дорог и от каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от каждого города можно добраться до любого другого.

Задача 11.

Имеются две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть "двойник" в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в Зазеркалье эти города не соединены, а каждые два несоединённых в Обычной стране города обязательно соединены железной дорогой в Зазеркалье. В Обычной стране досточтимый граф Урс не может проехать из города A в город B , сделав менее двух пересадок. Доказать, что досточтимый граф Урс в Зазеркалье сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

