

Неравенства

1. Сравните два числа а) 2^{300} и 3^{200} ; б) $2^{100}+3^{100}$ и 4^{100} .
2. Вовочка решил заболеть, чтобы не ходить в школу, поэтому решил съесть много мороженого. 9 одинаковых эскимо стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же эскимо – 15 рублей с копейками. Вовочка купил 10 эскимо. Сколько он потратил денег?
3. (Неравенство Коши) Докажите, что если $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

Когда неравенство обращается в равенство?

4. Докажите, что при $x \geq 0$

$$\text{а) } 1 + x \geq 2\sqrt{x} \quad \text{б) } x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

5. Докажите, что при любых a и b

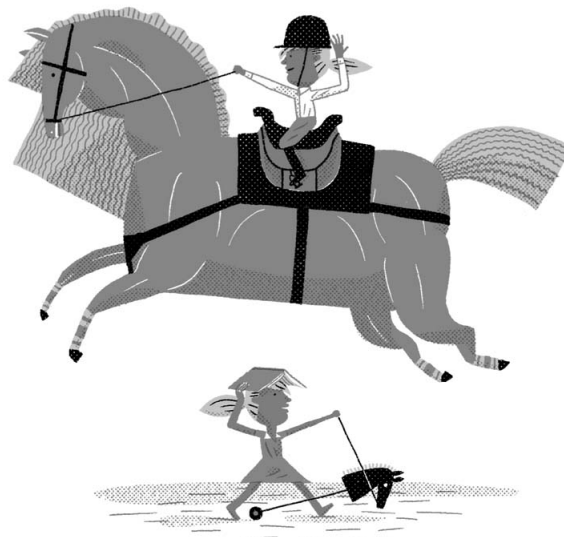
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$$

6. Докажите, что при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$$

7. Докажите, что при любых $x, y, z \geq 0$.

$$\text{а) } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad \text{б) } \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^2 \geq \frac{xy + yz + zx}{3}$$



Дополнительные задачи

8. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше 4.
9. Найти наименьшее значение выражения $x + \frac{1}{4}x$ при положительных значениях x .

