

Соответствия и счётность

Задача 1. Посчитайте, сколько элементов в каждом из следующих множеств:

- а) $\{7, 9, 289\}$;
- б) $\{\emptyset\}$ – пустое множество;
- в) множество стульев в этом классе;
- г) множество их ножек.



Задача 2. а) Посчитайте количество подмножеств для множеств из предыдущей задачи.

- б) Может ли у множества быть 3 подмножества?
- в) Сколько подмножеств у множества из n элементов?

Определение 1. Два множества называются *равномощными*, можно разбить их элементы в пары так, чтобы в каждой паре были элементы из обоих множеств.

Задача 3. Какие из следующих множеств являются равномощными?

- а) $\{1, 7, 8, 9\}$;
- б) $\{17, 89\}$;
- в) множество подмножеств множества $\{1, 4\}$;
- г) множество подмножеств множества подмножеств множества из одного элемента;
- д) любое множество из двух элементов.

Определение 2. Бесконечное множество называется *счётным*, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами.

Задача 4. Докажите, что множество является счётным тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству натуральных чисел.

Задача 5. В бесконечной гостинице комнаты занумерованы натуральными числами и в каждой живёт постоялец.

- а) Вдруг приехал ещё один гость. Как можно переселить жильцов, чтобы вновь приехавшему тоже досталась комната?
- б) Все жильцы комнат с чётными номерами вдруг уехали. Как переселить оставшихся жильцов, чтобы не было пустых комнат?
- в) Соседняя такая же гостиница вдруг закрылась на ремонт. Как переселить жильцов обеих гостиниц в первую, чтобы каждому снова досталась одна комната?



Задача 6. Может ли король обойти бесконечное шахматное поле, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

Задача 7. Какие из этих множеств являются счётными?

- а) множество натуральных чисел с нулём;
- б) множество чётных натуральных чисел;
- в) множество отрицательных целых чисел;
- г) множество всех целых чисел;
- д) множество всевозможных пар целых чисел;
- е) множество рациональных чисел с числителем 1;
- ё) множество рациональных чисел.

Дополнительные задачи

Задача 8. Докажите, что любое подмножество счётного множества счётно или конечно.

Задача 9. Докажите, что

- а) объединение счётного и конечного множеств счётно;
- б) объединение двух счётных множеств счётно;
- в) объединение счётного числа счётных множеств счётно.

Задача 10. Докажите, что у любого бесконечного множества есть счётное подмножество.

Задача 11. Из бесконечного множества выкинули его счётное подмножество. Докажите, что если оставшееся множество всё ещё бесконечно, то оно равномощно изначальному множеству.