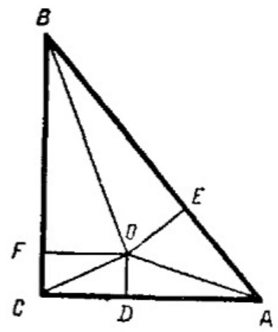
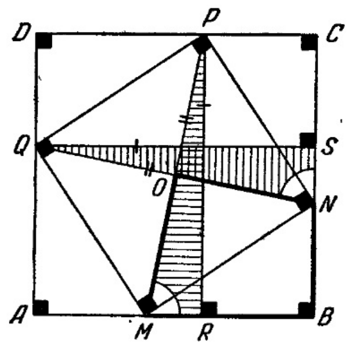
Верю — не верю

В предложенных ниже задачах содержатся ошибки — они могут быть как в доказательствах, так и в формулировках. Найдите и исправьте их!



Задача 1. Катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе.

Доказательство. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC BO — биссектриса острого угла, D — середина катета AC, $DO \perp AC$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$. Тогда прямоугольные треугольники BOE и BOF равны как имеющие общую гипотенузу BO и равные катеты OE и OF, а значит, $BE = BF$. Аналогично, прямоугольные треугольники OEA и OCF равны, т.к. $OA = OC$ и $OE = OF$, откуда получаем $AE = FC$. Таким образом, $AB = AE + BE = FC + BF = BC$.



Задача 2. Прямоугольник $MNPQ$, вписанный в квадрат $ABCD$ *(см. рис.)*, также является квадратом.

Доказательство. Опустим перпендикуляры PR и QS из точек P и Q соответственно на AB и BC. Каждый из этих перпендикуляров равен стороне квадрата $ABCD$, а значит, они равны между собой. Таким образом, в прямоугольных треугольниках PRM и QSN равны катеты и равны гипотенузы (как диагонали прямоугольника $MNPQ$), следовательно, эти треугольники равны, и $\angle PMR = \angle QNS$. Рассмотрим четырёхугольник $MBNO$, где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $MNPQ$; у него внешний угол при вершине N равен внутреннему углу при вершине M, значит, этот четырёхугольник — вписанный, и сумма внутренних углов при вершинах B и O равна $180°$; при этом $\angle B = 90°$, значит, угол O — также прямой. Таким образом, диагонали квадрата $MNPQ$ перпендикулярны и, следовательно, этот прямоугольник является квадратом.

Задача 3. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10, если высота, опущенная на гипотенузу, равна 6.

Решение. Площадь треугольника равна половине произведения высоты на основание, т.е, $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 30$.

Верю — не верю (продолжение)

Задача 4. Каждая из сторон треугольника не превосходит 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Доказательство. Обозначим длины сторон за a, b и c; по условию, $a \leq 1$, $b \leq 1$, $c \leq 1$. Воспользуемся формулой Герона: если p — полупериметр треугольника, то

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

В силу того, что каждая из сторон не превышает 1, справедливы неравенства $p \leq \frac{3}{2}$, $p-a \leq \frac{1}{2}$, $p-b \leq \frac{1}{2}$, $p-c \leq \frac{1}{2}$, а значит, и

$$S \leq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Задача 5. В равнобедренную трапецию, длина диагонали которой равна 2,5, вписан круг площади π. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть данная трапеция — $ABCD$. Так как радиус круга равен 1, то высота CM трапеции равна 2. Из треугольника CAM получим, что $AM = 1,5$. Из того, что трапеция равнобедренная, следует, что отрезок AM равен средней линии трапеции. Следовательно, её площадь $S = AM \cdot CM = 3$.

Задача 6. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 3$, $AC = 6$ и угол $\angle BAC = 60°$. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной к стороне BC.

Решение. Пусть $AD = l$ — искомая биссектриса. По теореме косинусов, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC = 27$, откуда $BC = 3\sqrt{3}$. По свойству биссектрисы треугольника, $\frac{DB}{CD} = \frac{BA}{CA}$. Обозначив длину BD через x, получим уравнение $\frac{x}{3\sqrt{3}-x} = \frac{3}{6}$, откуда $x = 3$. По теореме косинусов в треугольнике ABD, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD$. Подставив известные значения, получим квадратное уравнение $l^2 - 3\sqrt{3}l + 6 = 0$. Его корни: $l_1 = \sqrt{3}$; $l_2 = 2\sqrt{3}$. Таким образом, длина биссектрисы равна $\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$.

$\triangleright$ Треугольник однозначно определяется двумя сторонами и углом между ними. Откуда тогда взялись два ответа и какой из них верен?