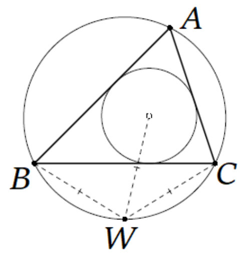
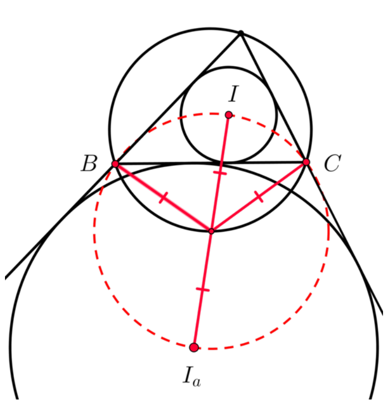
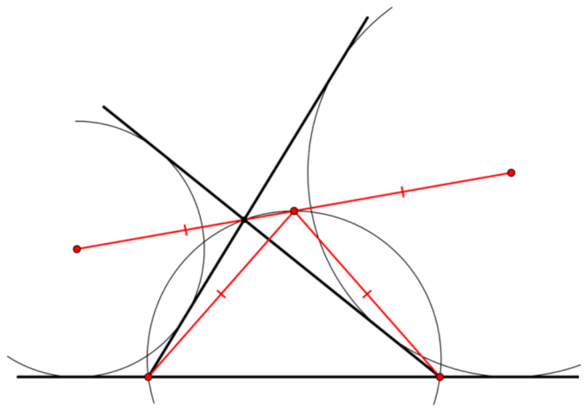
Лемма о трезубце



Задача 1 (Лемма о трезубце/теорема трилистника). Середина дуги BC (не содержащей точки A) описанной окружности треугольника ABC равноудалена от B, C и точки пересечения биссектрис этого треугольника.

Задача 2 (Теоремы о куриной лапке).
а) Середина меньшей дуги BC описанной окружности треугольника ABC равноудалена от точек B, C, центра вписанной окружности и центра вневписанной окружности, касающейся стороны BC.





б) Середина большей дуги BC описанной окружности треугольника ABC равноудалена от точек B, C и двух центров вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и AC.

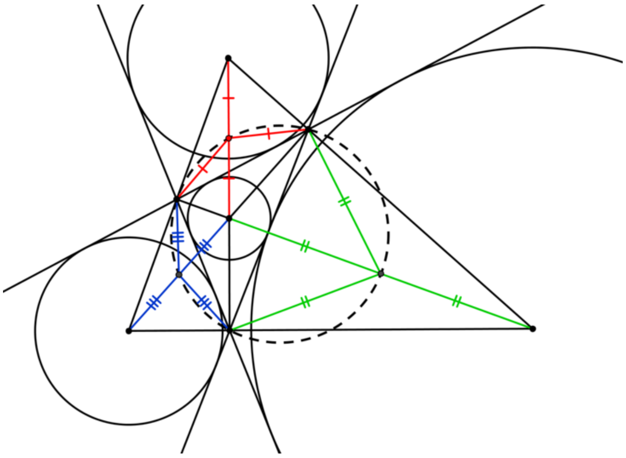
Итак, точка W является:
1) серединой дуги BC описанной окружности треугольника ABC
2) центром окружности, описанной около треугольника BIC
3) точкой пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и серединного перпендикуляра к стороне BC
4) центром окружности, описанной около четырёхугольника $BICI_a$

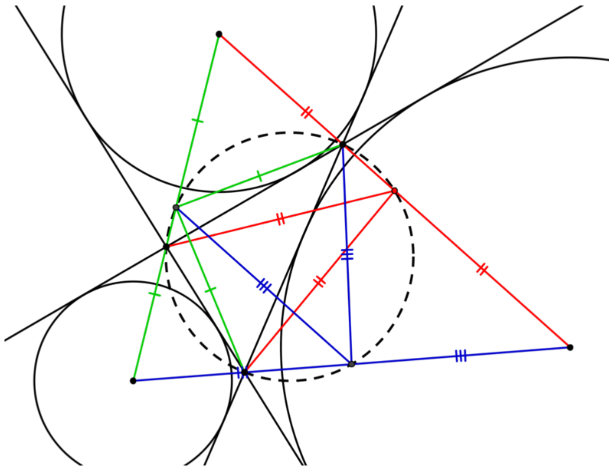
Кроме того, получаем, что *описанная окружность делит отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, пополам.*

Задача 3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

Лемма о трезубце (продолжение)

Задача 4 (Окружность 9 точек/Эйлера). Докажите, что основания высот произвольного треугольника, середины его сторон и середины отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.





Задача 5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно, а O — центр описанной окружности треугольника BCI. Докажите, что $\angle ODB = \angle OEC$.

Задача 6. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

Задача 7. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана такая точка P, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с точкой I.

Задача 8. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Точка J — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины JD и JE. Прямые BM и CN пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника ABC.