

Разбиение на пары

Задача 1. Кого в Англии больше женатых мужчин или замужних женщин?

Задача 2. Докажите, что если 11-угольник имеет ось симметрии, то она проходит через одну из его вершин.

Задача 3. Аня хочет выбрать и купить восемь из десяти имеющихся в магазине открыток, а Яна хочет выбрать и купить две из десяти имеющихся в магазине марок. У кого из девочек больше способов сделать свой выбор?

Задача 4. На шахматной доске стоят 11 пешек. Их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что хотя бы одна пешка стоит на ней.

Задача 5. Найдите сумму всех четных чисел от 2 до 2020.

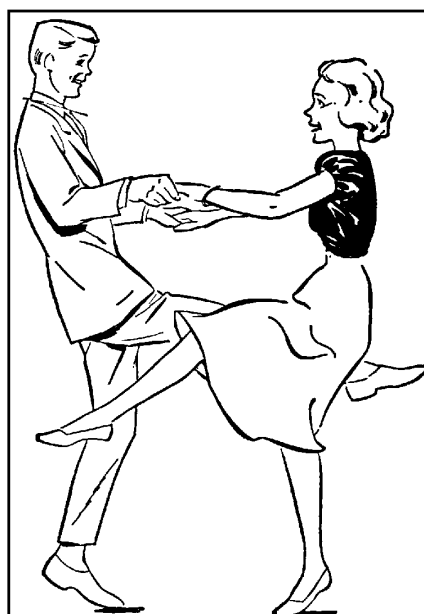
Задача 6. Чего среди первых 9999 натуральных чисел больше — чисел с суммой цифр 15 или чисел с суммой цифр 21?

Задача 7. а) Можно ли нарисовать девятизвенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

б) Нарисуйте замкнутую 6-звенную ломаную, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз.

в) Из скольких звеньев может состоять ломаная, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Задача 8. В роте 100 человек. Каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый единожды подежурил с каждым?



Дополнительные задачи

Задача 9. В куче 2010 камней. Двое по очереди берут из кучи от 1 до 9 камней. Выигрывает тот, кто взял последний камень. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнёр?

Задача 10. Двое играют в игру в квадрате 8×8 . Первый может своим ходом закрасить любую клетку квадрата. А второй может своим ходом любой уголок из трех клеток. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 11. Двое играют в игру. На доске 8×8 стоит фишка. За один ход её можно передвинуть на соседнюю по стороне клетку, при этом нельзя её ставить в клетки, где фишка уже побывала. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 12. 10-значное число $a_1a_2a_3a_4\dots a_9a_{10}$ назовем хорошим, если $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} > 0$. Докажите, что хороших чисел столько же сколько и не хороших.

Задача 13. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр от 000000 до 999999. Билет называют *счастливым*, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних цифр. Имеются билеты со всевозможными номерами, каждый билет встречается один раз.

а) Каких билетов больше: с номерами, в которых каждая цифра больше предыдущей или с номерами, в которых каждая цифра меньше предыдущей?

б) Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится на 999.

в) Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится на 1001.

г) Каких билетов больше: счастливых или тех, чьи номера делятся на 11?

д) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.