

Четность

0. Доказать, что: сумма а) любого количества чётных слагаемых чётна; б) чётного количества нечётных слагаемых чётна; в) нечётного количества нечётных слагаемых нечётна.
1. Сумма одиннадцати натуральных чисел нечётна. Сколько слагаемых нечетно?
2. В 9Б классе 28 учеников. Павел Александрович обнаружил, что после уроков на факультатив пришло на 9 ребят меньше, чем ушло из школы. Докажите, что кто-то из ребят все еще в гардеробе.
3. На кружок пришли семиклассники и восьмиклассники. У каждого из них в правом кармане в три раза больше ручек, чем в левом. Могло ли у них вместе быть 101 ручка?
4. Магический квадрат - это квадратная таблица, в клетки которой вписаны числа так, что их суммы по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям равны. Можно ли составить магический квадрат из 16 первых простых чисел?
5. Трем олимпиадникам выдали 7 карточек на обед с номерами от 1 до 7. Витя взял себе три карточки, Вова и Вася по две. Вова практически сразу потерял свои карточки. Но Витя сказал Васе: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна», и оказался абсолютно прав. Какие числа были написаны на карточках у Вити?
6. Квадрат 55×55 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.
7. Чётно или нечётно число $1 + 2 + 3 + \dots + 2019$? А что бы вы ответили через 1001 год?
8. Попугайчик Пак берется представить единицу в виде суммы 1000 дробей, числители которых равны 1, а знаменатели - нечетные числа. Удастся ли это ему?
9. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола чётно.
10. Дано n чисел, $x_1, x_2, \dots, x_n$, при этом $x_k = \pm 1$. Доказать, что если $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0$, то n делится на 4.