

Математическая индукция

0. Немного воспоминаний:

По кругу стоят n ребят: мальчиков и девочек. Докажите, что количество пар рядом стоящих ребят разного пола четно.

1. Докажите, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Чему равна сумма первых n четных чисел?
2. Докажите, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
3. Докажите тождество: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.
4. Докажите тождество: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (\frac{1}{2}n(n + 1))^2$.
5. Докажите тождество: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
6. Известно, что $x + 1/x$ - целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ - также целое при любом натуральном n .
7. Докажите, что $n! > 2^n > n^2 > 4n$ при $n > 4$.