

Делимость

Опр.1 Натуральное число n называется составным, если у него есть делитель отличный от 1 и n . Натуральное число n называется простым, если оно не составное и не равно 1.

Опр.2 НОД(a, b) называется такое наибольшее натуральное число, на которое делятся a и b . Числа называются взаимно простыми, если их НОД равен 1 (т.е. не имеют общих простых делителей)

Опр.3 НОК(a, b) называется такое наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b . (Если НОК двух чисел равен их произведению, то они также взаимно просты)

Теор.1(Основная теорема арифметики) Каждое натуральное число большее 1 раскладывается в произведение простых сомножителей, причем единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей).

Говорят, что простое число p входит в разложение числа n в степени m , если n делится на p^m , но уже не делится на p^{m+1} . Таким образом, любое простое число может входить в разложение любого натурального числа, просто быть при этом в нулевой степени.

Обозначение: пусть число n имеет простые делители $p_1, p_2, \dots, p_k$ соответственно в степенях $m_1, m_2, \dots, m_k$, тогда $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$

Теор.2 Простых чисел бесконечно много. Иначе говоря - существует сколь угодно большое простое число.

0. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$

1. Существует ли натуральное число, произведение цифр которого равно
а) 630? б) 5500?
2. Представьте число 39 в виде суммы нескольких натуральных чисел (не обязательно различных) так, чтобы произведение этих чисел также было бы равно 39.
3. Гриша утверждает, что получил 100 000, перемножив два целых сомножителя, в записи которых нет нулей. Не ошибается ли он?
4. Докажите, что а) произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6; б) произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 30; на 120.
5. Можно ли расставить по кругу семь натуральных чисел так, чтобы любые два соседних числа имели общий делитель больший 1, а любые два не соседних числа были взаимно просты?

Число делится на 3(на 9), если сумма цифр в его десятичной записи делится на 3(на 9).

6. В десятичной записи некоторого числа 30 единиц, а остальные цифры нули. Может ли это число быть квадратом некоторого натурального?
- 7*. Какое наибольшее количество попарно взаимно простых составных чисел можно выбрать из чисел от 1 до 50?
- 8*. Первоначально на доске написано натуральное число A . Разрешается прибавить к нему любой из его делителей, отличный от A и 1. С полученным числом разрешается проделать аналогичную операцию, и т. д. Докажите, что из числа $A = 4$ можно с помощью таких операций получить любое составное число.