

## Делимость II

**Обозначение:**  $(a, b) := \text{НОД}(a, b)$ .

**Обозначение:**  $a$  делит  $b$  ( $a|b$ ), если  $b$  делится на  $a$  ( $b:a$ ).

**Лемма 1** Пусть  $a$  и  $b$  натуральные и  $a > b$ , тогда  $(a, b) = (a - b, b)$ .

**Лемма 2** Пусть  $a|bc$  и  $(a, b) = 1$ , тогда  $a|c$ .

0. Докажите, если  $(m, n) = 1$ , то  $(m, nk) = (m, k)$ .
1. Найдите НОД чисел: а) 9999 и 396, б) 2173 и 2419.
2. Можно ли заменить звездочки цифрами в числе  $1*207*$ , чтобы оно делилось на 11 и делилось на 9? А в числе  $9*207*$ ?
3. Сколько раз подряд нужно записать число 2019, чтобы получившееся число делилось бы на 3 и на 11?
4. Являются ли числа полными квадратами?  
а) 71148 б) 40204020402
5. Является ли число  $111*222*444$  кубом какого-то натурального?
6. Известно, что натуральное число  $n$  в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что  $n$  делится на 27.
7. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?
8. Каково минимальное целое число вида  $111\dots 11$ , делящееся на  $333\dots 33$  (100 троек)?