

Дискретная непрерывность

Поймем на примере задачи. Пусть несколько целых чисел выписали в ряд так, что любые два соседних числа отличаются не более, чем на единицу (то есть выписаны несколько последовательных целых чисел). Более того, первое число отрицательно, а последнее - положительно. Докажите, что среди этих чисел есть число 0.

1. После первого тайма футбольного матча счет был $0 : 1$, а закончилась игра со счетом $5 : 3$. Докажите, что в какой-то момент матча счет был ничейным.
2. В ряд выложено 20 белых и 20 черных шариков. Самый левый и самый правый шарик - белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.
3. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые - направо, а остальные - кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

Вспомните. Как доказывается, что простых чисел бесконечно много?

4. а) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа?
б) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
5. На клетчатой доске 10×10 половина клеток белые, а половина - черные.
а) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток.
б*) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две **равные** части с равным числом черных клеток.
6. За круглым столом сидит четное количество гномов в колпаках с помпонами, причем, у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых количество помпонов на колпаках отличается не больше, чем на 1.
7. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

Дискретная непрерывность

Дополнительные задачи:

1. В некоторых клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 27. Докажите, что в некотором квадрате 5×5 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 5.
2. Плоскость раскрашена в два цвета (то есть каждая точка плоскости либо цвета 1, либо цвета 2). Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

Далее не про дискретную:

3. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника найдется прямая, пересекающая пополам его периметр и площадь.
4. По ипподрому со старта побежала лошадь. Пробежав один круг, она остановилась на старте. Докажите, что в каких-то двух противоположных точках ипподрома скорость лошади была одинаковой.
5. Выйдя на маршрут в 4 часа утра, альпинист Джеф Лоу к вечеру достиг пика «Свободная Корея». Переночевав на вершине, на следующий день он вышел в то же время и быстро спустился обратно по пути подъема. Докажите, что на маршруте есть такая точка, которую Лоу во время спуска и во время подъема проходил в одно и то же время суток.