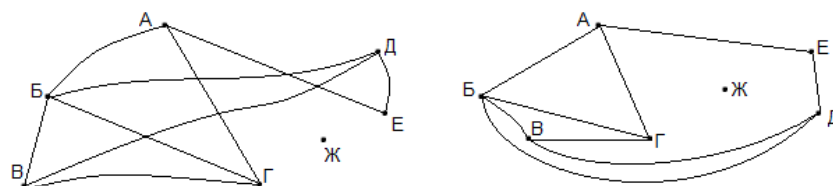


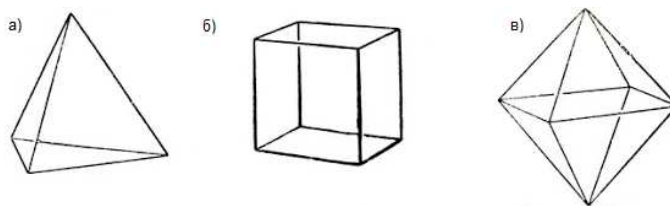
Графы

Граф - это несколько точек (*вершин*) и некоторое количество линий (*рёбер*), соединяющих какие-то точки, причем любые две вершины либо не соединены вовсе, либо соединены только одним ребром.

Примером графа может служить карта метро или карта автодорог. Обратите внимание, что на рисунке изображены одинаковые графы! (проверьте)



1. Перерисуйте следующие графы так, чтобы никакие ребра не пересекали бы друг друга.



2. Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троицком он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троицкого, если турист
 - а) не с него начал и не на нём закончил?
 - б) с него начал, но не на нём закончил?
 - в) с него начал и на нём закончил?

Степенью вершины называется количество ребер, выходящих из нее. Вершина, имеющая нечетную степень, называется *нечетной*, а четную степень - *четной*.

3. Можно ли обойти граф (по каждому ребру лишь раз), в котором либо равна одна вершина *нечетная*, либо более двух вершин *нечетные*?
4. Можно ли нарисовать граф, не отрывая карандаша от листа, как на первом рисунке (без Ж)?
А нарисовать, не отрывая карандаша от листа, граф, как на втором рисунке в)?

Полным графом называется граф, в котором проведены все возможные ребра. К примеру, если построен *полный* граф на n вершинах, то у каждой вершины *степень* будет равна $n - 1$.

5. А сколько в таком графе будет ребер?
6. В графе степени вершин соответственно равны 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4. Сколько ребер в графе?
7. В городе 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Теорема. В любом графе, число *нечетных* вершин четно.

8. Докажите теорему.
9. В городе N от каждой площади отходит ровно по 5 улиц, соединяющих площади. Докажите, что число площадей четно, а число улиц делится на 5.
10. У царя Гвидона было 5 детей. Из всех его потомков (детей, внуков, правнуков и т.д.) 57 имели ровно трех сыновей, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?
11. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что
 - а) можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого, пользуясь только этим видом транспорта;
 - б) из каждого города, выбрав один из видов транспорта, можно добраться до любого другого города не более, чем с одной пересадкой;
 - в) (усложненный а)) можно выбрать вид транспорта так, чтобы пользуясь только им, можно было добраться из любого города в любой другой не более, чем с двумя пересадками.