

But what if nothing changes?

- ▷ В задачах часто встречается описание некоторого процесса. В этом случае полезно проследить за различными величинами и обнаружить *инвариант*, т.е., свойство, которое остаётся неизменным на каждом шаге процесса, или же *полуинвариант* — величину, которая с каждым шагом меняется только определённым образом (например, всё время растёт или наоборот, всё время убывает).

Задача 1. Есть три кучки из 5, 8 и 18 камней. За один ход можно в одну кучку добавить один камень, а в другую — 5 камней.

- а) Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на 1 камень?
- б) Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

Задача 2. а) Над числами $1, 2, \dots, 10$ можно производить следующую операцию: к любым двум числам прибавить по единице. Можно ли с помощью таких операций сделать все числа равными?

- б) Тот же вопрос для набора чисел $1, 2, \dots, 11$.

Задача 3. На экране компьютера число 76543210. Каждую секунду робот уменьшает его на его сумму цифр. Докажите, что рано или поздно получится число 9.

Задача 4. Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7} .

Задача 5. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что бурьян не сможет распространиться на все клетки.

Задача 6. Есть три бидона ёмкостью 14 л, 9 л и 5 л. В большем бидоне 14 литров молока, остальные бидоны пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко пополам?

Задача 7. Среди 5 внешне одинаковых монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

Задача 8. В одной вершине куба стоит 1, а в остальных — 0. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

Задача 9. В последовательности 12340969487... каждая цифра равна последней цифре суммы предыдущих четырёх.

- а) Встретится ли в этой последовательности набор 3589?
- б) Встретится ли в этой последовательности набор 0128?