

Get ready!

Задача -1 (предразминка). Числитель и знаменатель положительной дроби — натуральные числа. Если числитель увеличить на 3, а знаменатель — на 2, то значение дроби уменьшится. Могло ли так быть?

Задача 0 (разминка). Записаны четыре различных натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, им обратных, равна 1. Может ли среди записанных чисел отсутствовать число 2?

▷ Число, обратное к числу n — это $\frac{1}{n}$.

Задача 1. Саша, Таня и Алина хотели купить непромокаемые мантии (декабрь же на дворе). Однако им не хватало денег: Тане — трети цены мантии, Алине — четверти, а Саше — одной пятой цены мантии. Когда на распродаже цена мантии упала на 9,4 стипендий, друзья объединили свои сбережения и купили три мантии, потратив все деньги. Сколько стипендий стоила одна мантия до снижения цены?

Задача 2. Из 1812 одинаковых квадратов $1\text{ мм} \times 1\text{ мм}$ сделали для фотографии прямоугольную рамку шириной в 1 квадрат. Потом фотографию разрезали по линии миллиметровой сетки на две прямоугольные части. Теперь нужно две рамки, на которые ушло 2018 таких же квадратов. Найдите размеры исходной фотографии.

Задача 3. Есть 30 шоколадок, каждая из которых — прямоугольник 1×3 или 1×4 дольки, а в сумме во всех шоколадках 100 долек. За секунду Миша может сломать любой кусок шоколадки на две части, состоящие из целого числа долек (если это возможно). Сколько времени нужно Мише, чтобы разломать все шоколадки на отдельные дольки?

Задача 4. В каждой вершине куба живёт число, не обязательно положительное. Все восемь чисел различны. Если число равно сумме трёх чисел, живущих в соседних с ним вершинах, то оно счастливо. Постройте пример, в котором все вершины куба — счастливые.

Задача 5. В треугольнике провели три медианы (они пересекаются в одной точке!) и отметили вершины, середины сторон и точку пересечения медиан. Можно ли расставить в 7 отмеченных точках различные натуральные числа так, чтобы суммы трёх чисел вдоль каждого отрезка оказались равными?

Задача 6. Нарисуйте шесть лучей так, чтобы они пересекались ровно в четырех точках, по три луча в каждой точке. Отметьте начала лучей жирными точками.

Задача 7. Каждый из тринадцати гномов — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Однажды все гномы по очереди сделали заявление: “Среди заявлений, сделанных ранее, ложных ровно на два больше, чем истинных”. Сколько рыцарей могло быть среди гномов?

Задача 8. Можно ли расставить натуральные числа в квадрате размером 7×7 так, чтобы в любом квадрате 2×2 и любом квадрате 3×3 сумма чисел была нечетна?

Get ready more

Задача 9. На острове Лжецов и Рыцарей расстановку по кругу называют правильной, если каждый стоящий в кругу может сказать, что среди двух его соседей есть представитель его племени. Однажды 2019 аборигенов образовали правильную расстановку по кругу. К ним подошел лжец и сказал: «Теперь мы вместе тоже можем образовать правильную расстановку по кругу». Сколько рыцарей могло быть в исходной расстановке?

Задача 10. Биолог последовательно рассаживал 150 жуков в десять банок. Причем в каждую следующую банку он сажал жуков больше, чем в предыдущую. Количество жуков в первой банке составляет не менее половины от количества жуков в десятой банке. Сколько жуков в шестой банке?

Задача 11. На клетчатой бумаге нарисовали большой квадрат. Его разрезали на несколько одинаковых средних квадратов. Один из средних квадратов разрезали на несколько одинаковых маленьких квадратов. Стороны всех квадратов проходят по линиям сетки. Найдите длины сторон большого, среднего и маленького квадратов, если сумма их площадей равна 154.

Задача 12. В углах таблицы 3×3 стоят числа 1, 3 и 5 (1 и 5 находятся в первой строке, 1 и 3 — в первом столбце). Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

Задача 13. Вдоль прямолинейного участка границы установлено 15 столбов. Около каждого столба поймали несколько близоруких шпионов. Каждый из них честно сказал, сколько других шпионов он видел. Но любой шпион видел только тех, кто находился около его столба и около ближайших соседних столбов. Можно ли по этим данным восстановить численность шпионов, пойманных около каждого столба?

Удачи на олимпиаде!