

Continuous Changes

Задача 1. Петя и Вася решили взобраться на вершину горы по разным маршрутам. Они стартовали одновременно из точек, находящихся на расстоянии 50 метров, и добрались до вершины также одновременно. Докажите, что в какой-то момент расстояние между Петей и Васей было одинаковым.

Задача 2. В полночь с четверга на пятницу было холоднее, чем в полночь со среды на четверг и в полночь с пятницы на субботу. Докажите, что было два момента в четверг и в пятницу, отличающиеся ровно на 24 часа, когда температура была одинаковой.

Задача 3. Буддийский монах поднимается на священную гору по священному пути монахов. Он начал восхождение на рассвете, в 7 часов утра, и достиг вершины на закате, в 7 часов вечера. На вершине он заночевал, а на следующий день в 7 утра начал спускаться обратно, и вернулся к подножию горы к 7 вечера. Докажите, что существует такая точка на его пути, в которой монах может помолиться на пути туда и обратно в одно и то же время суток.

Задача 4. Турист решил взобраться на ту же самую гору. Он начал восхождение у подножия горы в 7 часов утра и достиг вершины в 7 часов вечера. Переночевав на вершине, он начал спуск в 7 часов утра, однако, в самом начале подвернул ногу и к 7 часам вечера оказался только на середине горы. Верно ли, что и в первый, и во второй день он мог устроить привал в одной и той же точке пути в одно и то же время дня?

Continuous Changes

Задача 5. Шахматный король прошёл из левого нижнего угла в правый верхний (король за ход может сдвинуться на одну клетку по вертикали, горизонтали или диагонали). Затем ладья прошла из правого нижнего угла в левый верхний, за каждый ход сдвигаясь ровно на одну клетку по горизонтали или по вертикали. Докажите, что на доске всегда найдётся клетка, на которой побывали обе фигуры.

Задача 6. Докажите, что за любой промежуток времени длиной 36 минут часовая и минутная стрелки часов (обе стрелки движутся плавно, без "скачков") окажутся на одной прямой.

Задача 7. В квадратном искусственном пруду со стороной 100 метров плавают две утки. Сначала утки находились в противоположных углах пруда, а затем, поплавав некоторое время, оказались в других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент расстояние между кончиками клювов уток было равно 110 метров.

Задача 8. а) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD . Докажите, что на ней можно выбрать точку M так, что $\angle BMC = 100^\circ$.

б) В произвольном треугольнике ABC угол A — наибольший. Можно ли выбрать на высоте AD точку M так, что $\angle BMC = 100^\circ$?

Задача 9. Упрямая улитка хочет взобраться по скользкой стене. Улитка начинает ползти вверх, пока в некоторый момент не соскальзывает; затем, невероятным усилием остановив скольжение, начинает снова ползти вверх. Оказалось, что за день улитка побывала на высоте 1 метр 34 раза. Каково наименьшее количество моментов, когда улитка не сдвигалась по вертикали?