

Индукция

Задачи, предлагаемые вам сегодня, следует решать методом *индукции*. Этот метод заключается в рассмотрении всех случаев за счёт постройки устойчивой лестницы. Для неё вам надо доказать **базу**, рассмотрев любой простой случай и проработав его вручную, а также доказать **шаг**. Вам понадобится представить, что для какого-то k кто-то уже за вас всё доказал, и показать, что тогда для $k + 1$ всё тоже получится.

Задача 0 (пример). Докажем, что $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$.

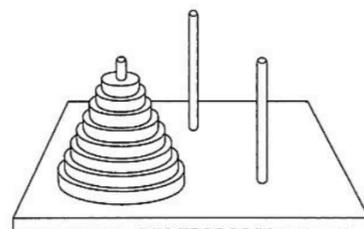
Задача 1. Покажите как разрезать квадрат 100×100 без угловой клетки на 4 квадрата 50×50 без угловых клеток и уголок из трёх клеток.

Задача 2. Как показать, что любой квадрат со стороной 2^n , но с вырезанной одной угловой клеткой, можно разрезать на уголки из трёх клеток?

Задача 3. Докажите, что $2^n \geq 2n$ для любого натурального n .

Задача 4. В стране Яиссор любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно проехать по всем городам, побывав в каждом по одному разу.

Задача 5 (Ханойские башни). Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров, которые нанизаны на стержень, и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее.



Докажите, что

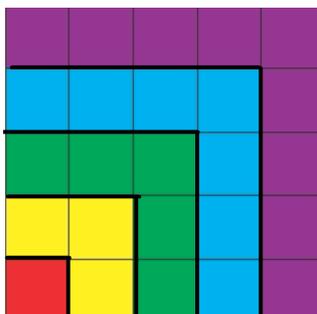
а) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

б) это можно сделать за $2^n - 1$ перекладываний.

(Придумайте сначала, как переложить 2, 3, 4 кольца)

Продолжение

Задача 6*. а) Какое тождество доказывается картинкой ниже?



б) Докажите то же самое скучным методом индукции.

Задача 7. Арман нарисовал на плоскости треугольник. Полина позачёркивала его рисунок проведя n прямых, которые разделили треугольник на какие-то части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

Задача 8. Надя нарисовала на доске n окружностей. Докажите, что Лиза всегда сможет раскрасить получившиеся фигуры в два цвета так, что никакие две фигуры, имеющие общую границу, не будут покрашены в один цвет.

Задача 9. На круговой трассе стоит n машин. В баке каждой машины уже есть какое-то количество бензина, причём известно, что если весь этот бензин залить в одну любую машину, то она сможет проехать весь круг. Докажите, что если разрешить водителю переливать из других машин бензин к себе, то он может, выбрав какую-то машину, проехать весь круг.