Избегайте рукопожатий!

▷ **Определение 1.** Граф — совокупность из множества вершин и наборов пар вершин (рёбер, связывающих эти вершины).

▷ **Определение 2.** Путь в графе — последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром

▷ **Определение 3.** Дерево — граф, в которым между любыми двумя вершинами существует ровно один путь.

Задача 1. Дружеская компания из 10 человек встретилась в кофе и, не зная про коронавирус, каждый с каждым обнялся. Сколько объятий произошло?

Задача 2. В каждом городе страны есть 2 гонца, которых можно отправить в любой другой город с поручением. При этом гонец путешествует туда день, а прибыв туда гонец остается там на две недели отдыхать. Король страны «стогородовая», хочет чтобы послание доставили в каждый из 99 оставшихся городов. **а**) Сколько гонцов поработают? **б**) За сколько дней они разнесут новость по всем городам? **в**) Аналогичные вопросы при условии, что в каждом городе готовы к работе 3 гонца.

▷ **Определение 4.** Степень вершины — количество рёбер выходящих из этой вершины.

Задача 3. В далёкой африканской стране Алогна 57 деревень, между некоторыми из которых проложены дороги. Известно, что из каждой деревни можно попасть в любую другую, притом по единственному маршруту. **а**) Докажите, что найдётся деревня, из которой выходит лишь одна дорога. **б**) Докажите, что найдутся две такие деревни. **в**) Сколько дорог в Алогне?

Задача 4. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл

Задача 5. Докажите, что связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является деревом.

Задача 6. Докажите, что в любом связном графе можно удалить **а**) несколько ребер так, чтобы осталось дерево; **б**) вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

Продолжение

Задача 7. Расстоянием между двумя произвольными вершинами дерева будем называть длину простого пути, соединяющего их. Удалённостью вершины дерева назовем сумму расстояний от нее до всех остальных вершин. Докажите, что в дереве, у которого есть две вершины с удалённостями, отличающимися на 1, нечётное число вершин

Задача 8. Есть волейбольная сетка 5×10. Какое максимальное число веревок, её составляющих, можно разрезать так, чтобы она не распалась?

Задача 9. Дима нарисовал на доске семь графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два изоморфных.

Задача 10. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.