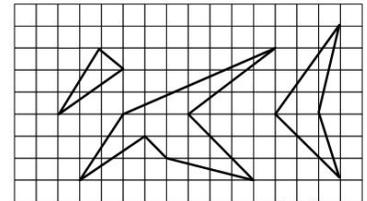


## Формула Пика

Пусть вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах сетки, причём внутри него лежит  $n$  узлов сетки, а на границе  $t$  узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна  $n + t/2 - 1$ .

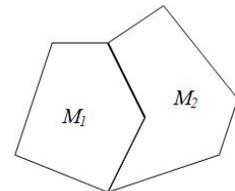
1. Найдите площади многоугольников, изображённых на рисунке справа и убедитесь, что формула Пика работает.



2. Докажите формулу Пика в частных случаях:

- а) для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;
- б) для многоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;
- в) для прямоугольного треугольника с катетами на линиях сетки;
- г) для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для каждого из которых формула Пика уже доказана.

3. а) Докажите, что формула Пика работает для многоугольника, составленного из двух многоугольников  $M_1$  и  $M_2$ , для каждого из которых формула Пика уже доказана.



б) Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одной из частей, то она выполняется и для другой.

4. а) Докажите, что любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

б) Докажите формулу Пика для произвольного многоугольника с вершинами в узлах сетки.

5. Нарисуйте треугольник площади  $\frac{1}{2}$ , у которого все стороны больше 5, а вершины лежат в узлах сетки.

6. Можно ли квадрат  $50 \times 50$  разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах сетки?

7. Шахматный король обошел доску  $8 \times 8$  клеток, побывав на каждом поле ровно 1 раз, и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, последовательно соединяющая центры полей, не имеет самопересечений. Найдите площадь, ограниченную этой ломаной.

8. а) Пусть  $A$  и  $B$  – два узла клетчатой сетки, причём  $A$  расположен на  $p$  клеток правее и на  $q$  клеток выше другого. При каких условиях середина  $AB$  тоже будет лежать в узле сетки?

б) Чему равно расстояние от прямой  $AB$  до ближайшего к ней узла, не лежащего на этой прямой?

<https://www.mccme.ru/circles/mccme/2020/>

