9.11.2019, 9 класс

Остатки

Определение 1. Пусть a и n целые числа. Тогда остатком от деления a на n называется такое число r, что $a = nq + r$, где q – целое число,и $0 \leq r \leq |b|$.

Например, остаток при делении -179 на 57 это 49, так как

$$-197 = 57 \cdot (-4) + 49$$

Определение 2. Говорят, что a сравнимо с b по модулю n (и пишут $a \equiv b \mod n$), если $a - b$ делится на n.

Задача 1. **a)** Число делится на 44 с остатком 15. С каким остатком оно делится на 11?
b) Число делится на 7 с остатком 5. Какой остаток оно может давать при делении на 35? Найдите все возможные варианты.

Задача 2. **a)** Докажите, что $-1 \equiv 3 \mod 4$.
b) Докажите, что $a \equiv b \mod n$ тогда и только тогда, когда a и b имеют одинаковые остатки при делении на n.

Задача 3. Сформулируйте и докажите признаки делимости на $2, 5, 3, 9, 4$.

Задача 4. Докажите, что если $a \equiv c \mod n$ и $b \equiv d \mod n$, то
a) $a + b = c + d \mod n$; **b)** $a \cdot b \equiv c \cdot d \mod n$; **c)** $k \cdot a \equiv k \cdot c \mod n$ для любого целого k; **d)** $a^k \equiv c^k \mod n$ для любого натурального k.

Задача 5. Найдите остаток от деления $1 + 31 + 331 + \ldots + 33333333331$ на 3.

Задача 6. Найдите всевозможные остатки от деления квадрата целого числа на **a)** 3, **b)** 4, **c)** 5.
d) Докажите, что число вида $100\ldots04$ не может быть квадратом целого числа.

Задача 7. При каких натуральных n число $2^n - 1$ делится на 7?

Задача 8. Какой цифрой будет оканчиваться число **a)** 2^{100}; **b)** $33^{77}+77^{33}$; **c)** $9999^{99999^{99}}$?

https://www.mccme.ru/circles/mccme/2020/