

НОД и НОК

Задача 1. а) Найдите остаток от деления числа $179 \cdot 2935$ по модулю 9;

б) Найдите остаток от деления 12^{100} на 13.

Задача 2. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно составить из 48 конфет "Ласточка" и 36 конфет "Белочка" если надо использовать все конфеты? Сколько конфет "Ласточка" и "Белочка" будет в каждом подарке?

Задача 3. Шаг Володи 75 см, а шаг Кати 60 см. На каком наименьшем расстоянии они оба сделают по целому числу шагов?

Определение 1. Наибольший общий делитель целых чисел a и b — это наибольшее натуральное число c такое, что a делится на c , и b делится на c . Обозначается $\text{НОД}(a, b)$ или просто (a, b) . Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.

Определение 2. Наименьшее общее кратное целых чисел a и b — это наименьшее натуральное число c такое, что c делится на a , и c делится на b . Обозначается $\text{НОК}(a, b)$ или $[a, b]$. Аналогично определяется НОК нескольких целых чисел.

Задача 4. Пусть числа a и b разложены на простые множители $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, $b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$. Выразите (a, b) и $[a, b]$, пользуясь разложением на простые множители.

Задача 5. Вычислите (без калькулятора):

а) $(8, 64)$ и $[8, 64]$; **б)** $(36, 60)$ и $[36, 60]$; **в)** $(2^3 \cdot 3^{15} \cdot 7^{19}, 2^{31} \cdot 3^2 \cdot 11^3)$ и $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3]$

Задача 6. Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделитем a на b с остатком: $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Докажите, что:

а) $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$; **б)** $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r, b)$.

Задача 7. Найдите НОД чисел **а)** $2n$ и $2n + 2$; **б)** $3n$ и $6n + 3$; **в)** $2n$ и $4n + 2$; **г)** $30n + 25$ и $20n + 15$.

Задача 8. Докажите, что для любых двух целых чисел a и b имеет место равенство $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$

