

Решение уравнений в целых числах 2

Задача 1. Решите уравнение $5x - 7y = 3$ в целых числах "по шагам":

- а)** найдите какое-нибудь одно решение (x_0, y_0) , то есть такие x_0 и y_0 , чтобы выполнялось равенство $5x_0 - 7y_0 = 3$;
- б)** докажите, что если (x, y) — любое решение уравнения $5x - 7y = 3$, то тогда $5(x - x_0) - 7(y - y_0) = 0$;
- с)** найдите все решения уравнения $5z - 7t = 0$ в целых числах;
- д)** найдите все решения уравнения $5x - 7y = 3$ в целых числах.

Задача 2. Решите в целых числах уравнения:

- а)** $3x + 5y = 13$; **б)** $10x + 15y = -5$; **с)** $-6x + 21y = 18$.

Задача 3. Решите в натуральных числах уравнение $2000x + 513y = 2513$.

Задача 4. (*Напоминание, можно не сдавать эту задачу*) Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделим a на b с остатком: $a = bq + r, 0 \leq r < b$. Докажите, что:

- а)** $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$; **б)** $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r, b)$.

Задача 5. (Алгоритм Евклида). Пусть необходимо определить наибольший общий делитель двух натуральных чисел $a = r_0$ и $b = r_1, r_0 > r_1$. Произведем несколько делений с остатком:

$$r_0 = q_1 \cdot r_1 + r_2;$$

$$r_1 = q_2 \cdot r_2 + r_3;$$

...

$$r_i = q_{i+1} \cdot r_{i+1} + r_{i+2};$$

...

$$r_n = q_{n+1} \cdot r_{n+1} + r_{n+2},$$

где $r_{n+2} = 0$.

Тогда утверждается, что $(r_0, r_1) = r_{n+1}$.

- а)** Докажите, что алгоритм Евклида содержит конечное число действий (делений) для любых a и b ;
- б)** Докажите, что $(r_0, r_1) = (r_1, r_2)$ (это в точности задача 4б).
- с)** Поймите, что вы доказали, что $(r_0, r_1) = (r_{n+1}, r_{n+2})$ и что из этого следует, что $(r_0, r_1) = r_{n+1}$.

Задача 6. Теорема о линейном представлении НОД: пусть $d = (a, b)$, тогда существуют такие целые m и n , что $m \cdot a + n \cdot b = d$.

Задача 7. Для уравнения $ax + by = c$:

- а)** докажите, что оно имеет решения тогда и только тогда, когда c делится на (a, b) ;
- б)** докажите, что все его решения имеют вид:

$$x = x_0 + \frac{b}{(a, b)}k, \quad y = y_0 - \frac{a}{(a, b)}k,$$

где (x_0, y_0) —любое решение, а k пробегает все целые числа.

