

## Индукция

**Основная схема индукции:** Пусть доминошки выставлены на ребро друг за другом. Нам необходимо доказать следующий факт: „Если толкнуть 1-ю доминошку, то для любого сколь угодно большого натурального  $N$  доминошка с номером  $N$  когда-нибудь упадёт”.

Для доказательства понадобится установить верность 2-х утверждений:

- 1) **База:** мы можем толкнуть первую доминошку и она упадёт.
- 2) **Переход:** если падает доминошка с номером  $k$ , то она толкает доминошку с номером  $(k + 1)$ .

**Задача 1.** На плоскости проведены  $n$  прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что они разбивают плоскость на  $2n$  областей.

**Задача 2.** Докажите неравенство для любого натурального  $n$ :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \leq n^2$$

**Задача 3.** Докажите, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**Задача 4.** Докажите, что произведение всех чисел от  $n + 1$  до  $2n$  делится на  $2^n$ , но не делится на  $2^{n+1}$ .

**Задача 5.** Известно, что число  $x + \frac{1}{x}$  – целое. Докажите, что число  $x^n + \frac{1}{x^n}$  тоже целое.

**Задача 6.** Плоскость разрезана на части  $n$  прямыми, где  $n > 3$  и не все прямые проходят через одну точку. Докажите, что хотя бы одна из частей – треугольник.

**Задача 7.** На сколько частей делят плоскость  $n$  прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

**Задача 8.** Докажите, что любое число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки.

**Задача 9.** Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.