

Комбинаторика

Часть 1

Для тех, кто забыл, или никогда не знал.

Задача 1. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать: **а)** капитана и его ассистента; **б)** капитана, первого ассистента и второго ассистента?

Задача 2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

Задача 3. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать из них **а)** двух; **б)** трех; **в)** восьмерых игроков для прохождения допинг-контроля?

Определение. Количество способов выбрать из n элементов k элементов обозначается C_n^k .

Задача 4. Докажите, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Часть 2

Задача 5. Монету подбрасывают 8 раз. При этом получается некоторая последовательность «орлов» и «решек» (длины 8). Сколько всего существует таких последовательностей, в которых «орёл» выпал ровно три раза?

Задача 6. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Задача 7. а) Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

б) Сколькими способами можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам (в ящике может быть любое количество шаров)?

Задача 8. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + y + z = 5$?

Задача 9. В магазине продаётся апельсиновый, виноградный, персиковый и яблочный сок. Нужно купить семь пакетов сока. Сколько различных наборов можно составить?

Задача 10. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$?

Задача 11. Маршрутом мы будем называть ломаную, у которой вершины имеют целочисленные координаты, а звенья направлены либо вправо, либо вверх.

Сколько маршрутов ведут из точки $A(0, 0)$ в точку $B(10, 6)$? Сколько таких маршрутов проходит через точку $M(6, 4)$?

Задача 12. Доказать, что

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} C_n^i$$

Задача 13. Найти сумму

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$$



Часть 3

Задача 14. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 7?

Задача 15. Сколько существует пятизначных чисел, произведение цифр которых делится на 5?

Задача 16. Дан выпуклый n -угольник ($n \geq 5$). Сколькими способами можно выбрать в нём две непересекающиеся диагонали?

Задача 17. В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?