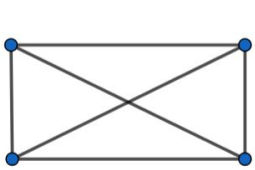
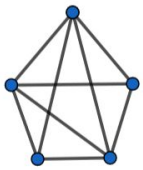
Планарные графы

Планарный граф (или плоский граф) — граф, который можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались.

1.Являются ли данные графы планарными?





2. а) Нарисуйте правильно плоский граф, вершины которого соответствуют вершинам куба, а рёбра — рёбрам куба. То же самое для тетраэдра.
б) Нарисуйте плоский граф для октаэдра (многогранника, у которого 6 вершин, 8 граней и 12 рёбер).

Для планарного правильно нарисованного графа введём обозначения: В — количество его вершин, Р — количество рёбер, Г — количество частей, на которые он разбивает плоскость (количество граней).
Дерево — связный граф без циклов.

3. а) Чему равно В - Р у произвольного дерева? б) Докажите, что В - Р + Г = 2 для произвольного дерева.

4. Докажите, что в любом связном графе можно удалить некоторое количество рёбер так, что он станет деревом

5. *(Формула Эйлера)* Докажите, что В - Р + Г = 2 для плоского правильного нарисованного графа.

6. В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 непересекающимися каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Островом считается часть суши, окруженная водой. Сколько в этой стране островов?

7. Грани некоторого многогранника раскрашены в два цвета так, что соседние грани имеют разные цвета. Известно, что все грани, кроме одной, имеют число рёбер, кратное 3. Доказать, что и эта одна грань имеет кратное 3 число рёбер.

Дополнительные задачи

8. а) Докажите, что для плоского графа справедливо неравенство $2Р \geq 3Г$, если $Р \geq 2$.

б)Докажите, что для плоского связного графа справедливо неравенство $Р \leq 3В - 6$.

9. Докажите, что граф, имеющий пять вершин, каждая из которых соединена ребром со всеми остальными, не является плоским.

10. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо "красный", либо "синий" граф не является плоским.

11. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?