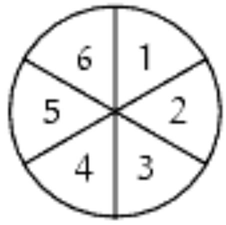
Инварианты

Задача 1. На доске написаны натуральные числа от 1 до 2007. Карлсон занимается тем, что каждую секунду стирает с доски какие-то два числа и пишет их разность. В конце концов у него осталось одно число. Могла ли это быть единица?

Задача 2. Круг разделен на 6 секторов (см. рис.), в которых по порядку написаны числа от 1 до 6. За один ход разрешается добавить по единице к двум соседним числам. Можно ли через некоторое число шагов получить во всех секторах одинаковые числа?



Задача 3. Фишки выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке, если всего их a) 2006; b) 2007.

Задача 4. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города А в самый удаленный от него город Б, оттуда — в самый удаленный от него город С и т. д. Докажите, что если С не совпадает с А, то путешественник никогда не вернется в А.

Задача 5. Вася и Маша играют в игру: есть две кучки из 179 и 57 камней, за ход игрок может разделить любую кучку на две; проигрывает тот, кто не может сделать ход, начинает игру Маша. Кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы не играл его соперник?

Задача 6. В каждой вершине куба стоит число +1 или −1. В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной 0?

Задача 7. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

Задача 8. В колоде часть карт лежит «рубашкой вниз». Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат «рубашкой вниз», переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут «рубашкой вверх», как бы ни действовал Петя.

Задача 9. На квадратном поле 10 × 10 несколько клеток 1 × 1 заражены опасным вирусом. Опасный вирус может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже заражены. **а)** Как при этом меняется периметр заражённой области? **б)** Докажите, что если в начале заражённых клеток 9, то вирус не сможет распространиться на все клетки.