

Арифметические прогрессии

Определение 1. Арифметическая прогрессия — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$, в которой разность $d = a_k - a_{k-1}$ между соседними числами одинакова для всех k ; она называется разностью или приращением прогрессии.

Задача 1. Будет ли арифметической прогрессией последовательность с n -ым членом, равным:

а) $\underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n$; **б)** $\frac{1 + 2 + \dots + n}{n}$; **в)** n -му натуральному числу, оканчивающемуся на 13.

Задача 2. Выразите n -ый член арифметической прогрессии через первый член и разность.

Задача 3. Найдите 50-ое натуральное число, большее 90, с остатком 3 от деления на 4.

Задача 4. а) Каждый член некоторой последовательности равен среднему арифметическому двух соседних членов: $a_k = (a_{k-1} + a_{k+1})/2$. Верно ли, что эта последовательность — арифметическая прогрессия?

б) Про последовательность $a_1, a_2, \dots$ известно, что $(a_n + a_{n+3})/2 = (a_{n+1} + a_{n+2})/2$ для всех n . Верно ли, что эта последовательность является арифметической прогрессией?

Задача 5. Выразите сумму всех членов конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$

а) через два крайних члена и количество слагаемых;

б) через начальный член, количество слагаемых и приращение.

Задача 6. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, оканчивающихся на 2 или 7.

Задача 7. Найдите 100-ый член последовательности a_n , заданной условиями $a_1 = 1, a_2 = 4, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ при $n \geq 3$.

Задача 8. При каких a и b уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

Задача 9. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

Задача 10. Может ли сумма $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$ при каком-нибудь натуральном n оканчиваться цифрой 7?

Задача 11. Боря задумал целое число, большее чем 100. Кира называет целое число, большее чем 1. Если Борино число делится на это число, Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа названное, и Кира называет следующее число. Ей запрещается повторять числа, названные ранее. Если Борино число станет отрицательным — Кира проигрывает. Есть ли у неё выигрышная стратегия?

