Двоичная система счисления

1. Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых монеток так, что любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков?

2. Запишите число 86 в двоичной записи.

3. 86 команд сыграли турнир по олимпийской системе*. Сколько было сыграно туров?

4. а) N команд сыграли турнир по олимпийской системе. В двоичной записи числа N последние четыре цифры – это 0101. Будет ли в 4 туре команда, которой «повезло»? б) N команд сыграли турнир по олимпийской системе. Сколько было сыграно туров, если известно, что в двоичной записи числа N пять единиц и восемь нулей?

5. Решите задачи 3 и 4 при условии, что команда, которой не досталось пары, считается проигравшей и выбывает из игры.

6. За одну операцию разрешается имеющееся число возвести в квадрат, или умножить на a. За 9 операций получите из числа a число a^{86}.

7. а) В двоичной записи числа N пять единиц и восемь нулей. Докажите, что за 16 операций (см. задачу 6) из числа a можно получить число a^N? б) За какое наименьшее число операций из числа a можно получить число a^N?

8. Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно – одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого ученика? (Учеников не обязательно 30.)

**** Турнир по олимпийской системе проходит следующим образом:***

В каждом туре команды разбиваются на пары играющих между собой команд. Все проигравшие команды выбывают, а выигравшие выходят в следующий тур. Команда, которой не досталось пары (если такая найдется) автоматически переходит в следующий тур (считается, что ей повезло).

Дополнительные задачи

9. В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г, ... (все степени числа 2), причём среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны. Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.

10. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке p стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние, и т.д. При каких p Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек 0 или 1 вне зависимости от действий Бориса?