Инварианты

***Инвариант** — это величина, которая не изменяется в результате некоторых действий. В качестве инварианта часто используют чётность, произведение или сумму данных чисел и тому подобные величины.*

Задача 1. а) Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля а1 на поле а8?
б) Шахматный верблюд ходит так: на одну клетку в каком-то направлении и на три в перпендикулярном. Может ли он за несколько ходов встать на соседнюю (имеющую общую сторону с исходной) клетку?

Задача 2. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

Задача 3. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять по 1. Можно ли, проделав это несколько раз, сделать эти числа равными?

Задача 4. Двое по очереди ломают шоколадку 6*8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет в этой игре?

Задача 5. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?

Задача 6. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном
порядке?

Задача 7. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

Дополнительные задачи

Задача 8. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

Задача 9. На доске написаны числа
а) 1, 2, 3, ..., 2019;
б) 1, 2, 3, ..., 2021.
Разрешается стереть два любых числа и вместо них написать их разность. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали нулями?

Задача 10. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Задача 11. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2*2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

Задача 12. В вершинах куба расставлены числа: 7 нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными? А можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

Задача 13. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

Задача 14. Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника а) 8×9 клеток? б) 8×10 клеток?

Задача 15. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки и одна плитка 2×2 потерялась. Ее заменили на плитку 1×4. Докажите, что теперь дно коробки вымостить не удастся.

Задача 16. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.