

Делимость

Задача 1. Существует ли такое натуральное число N , что сумма цифр числа $2 * N$ делится на 12?

Задача 2. Докажите, что произведение

- а) двух подряд идущих целых чисел четно;
- б) трёх подряд идущих целых чисел делится на 6.

Задача 3. Делится ли число $10^{2020} + 8$ на 9?

Задача 4. Может ли быть так, что ни одно из данных двух целых чисел не делится на 6, а произведение этих чисел делится на 36?

Задача 5. Ковбой Джо попросил в баре бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, 3 пачки табаку и 9 коробок спичек (их цену он не знал). Бармен потребовал 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), на что Джо вытащил револьвер. Бармен сразу же пересчитал и исправил ошибку. Как Джо понял, что его обсчитали?

Задача 6. Существуют ли целые числа x , y и z , удовлетворяющие уравнению $28x + 30y + 31z = 365$?

Задача 7. Ковбои входят в город, каждый со своим конем. У каждого ковбоя либо в два раза больше револьверов, либо в два раза меньше револьверов, чем у его коня. Может ли всего у них быть 100 револьверов?

Задача 8. Ковбой построил коней в колонну по 4, но при этом конь Сфен остался лишним. Тогда ковбой построил коней в колонну по 5, и снова Сфен остался лишним. Когда же и в колонне по 6 конь Сфен в остался лишним, ковбой начал подумывать о том, что пора бы проиграть Сфена в карты, после чего в колонне по 7 Сфен нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое наименьшее количество коней могло быть у ковбоя?



Дополнительные задачи

Задача 9. Имеется три волшебных коня. Если одному из них на дать лист, где написаны числа (m, n) , то он его съест и выплюнет лист с числами (n, m) , если другому – выплюнет $(n + m, n)$, третьему – выплюнет $(m - n, n)$. Можно ли таким образом из листа $(42, 21)$ получить лист $(19, 84)$?

Задача 10. Конь призрак ищет два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11. Помогите ему.

Задача 11. Ковбой Джо и его конь Сфен нашли на дороге по мешку с 11-рублевыми монетами. Джо выпил 3 бутылки виски, съел 4 бифштекса и выкурил 5 сигар и расплатился 11-рублевками без сдачи. Сфен выпил 9 бутылок виски, съел 1 бифштекс и выкурил 4 сигары. Докажите, что Сфен тоже сможет расплатиться 11-рублевыми монетами без сдачи.

Задача 12. Конь Сфен задумался: «На сколько нулей оканчивается число $1*2*3*...*2000?$ » Помогите ему.

Задача 13. На поле Чудес растут деревья с золотыми монетами. Каждую ночь на каждом дереве вырастает по одной новой монете. 1 марта на деревьях было всего 1000 монет. В один из дней марта Буратино посадил еще одно дерево, и 31 марта на деревьях оказалось всего 2000 монет. В какой день Буратино посадил дерево?

Задача 14. Конь Сфен думает, что если натуральные числа a, b и c таковы, что числа $a + b, b + c, a + c$ – простые, то среди них найдутся равные. Права ли Сфен? (простое число – это число, которое делится только на себя и на 1)

Задача 15. Найдите последнюю цифру числа:

- а) 2001^{2001} ;
- б) 549^{49} ;
- в) 345673^{376543} ;
- г) 77^{7777} ;
- д) $2013^{2015} + 2015^{2017}$.

Задача 16. Назовем автобусный билет с шестизначным номером счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

Задача 17. В последовательности цифр каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предыдущих. Последовательность начинается с цифр 1234096... Может ли в ней встретиться комбинация цифр 1999?