Принцип Дирихле

«Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика».

Доказательство: Пусть клеток m, а кроликов n, $n > m$. Предположим, что в каждой клетке сидят один или меньше кроликов. Тогда в каждой клетке может сидеть максимум один кролик, а значит всего кроликов может быть не больше, чем m, но по условию задачи $m < n$. Мы пришли к противоречию, а значит доказали утверждение.

1. Обязательно ли среди двадцати пяти "медных" монет (т.е. монет достоинством 1, 2, 3, 5 коп.) найдётся семь монет одинакового достоинства?

2. а) Докажите, что в любой футбольной команде есть два игрока, которые родились в один и тот же день недели.
   б) Докажите, что среди жителей Москвы (12 655 050 чел.) найдутся десять тысяч, празднующих день рождения в один и тот же день.

3. В шляпе сидят кролики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число кроликов нужно вынуть из шляпы вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два кролика одного цвета?

4. На шахматной доске более четверти полей занято шахматными фигурами. Докажите, что занятыми оказались хотя бы две соседние (по стороне или диагонали) клетки.

5. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число знакомых в данной компании.

6. Каждая клетка таблицы 2021×2021 покрашена в один из 2020 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Можно ли за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?

7. а) Покажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых кратна 5.
   б) Останется ли это утверждение верным, если вместо разности взять сумму?

Дополнительные задачи

8. Вдоль правой стороны дороги припарковано 100 машин. Среди них — 30 красных, 20 желтых и 20 розовых мерседесов. Известно, что никакие два мерседеса разного цвета не стоят рядом. Докажите, что тогда какие-то три мерседеса, стоящие подряд — одного цвета.

9. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

10. Можно ли найти 57 различных двузначных чисел, чтобы сумма никаких двух из них не равнялась 100?

11. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

12. Квадрат разрезали 18 прямыми, из которых девять параллельны одной стороне квадрата, а девять – другой, на 100 прямоугольников. Оказалось, что ровно девять из них – квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.