Индукция

Путь в тысячу вёрст
начинается с первого шага.

Задача 0. Докажите, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Задача 1. Докажите, что число $11\ldots1$ (состоящее из 3^n единиц) делится на 3^n.

Задача 2. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых никакие три не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны?

Задача 3. Докажите следующее равенство:

$$\frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{n-1}{n}.$$

а) Проверьте базу;

б) что нужно прабавить к левой и правой части? *Сформулируйте* переход, если можете — докажите.

Задача 4. Чему равна сумма $1 + 3 + \ldots + (2n-1)$?

а) Проверьте при $n = 1, 2, 3, 4$.

б) Сформулируйте предположение индукции.

в) Вспомните формулу $(n+1)^2 = \ldots$. Причём тут она?

Задача 5. Чему равна сумма $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$?

а) Выпишите в табличку для $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ суммы последовательных чисел от 1 до n, а под ними суммы, которые мы ищем;

б) разделите числа из верхней строчки на числа под ними — видите закономерность?

в) Вспомните формулу для сумм последовательных чисел от 1 до n, выпишите закономерность и получите формулу для искомой суммы (вернее, *гипотезу*).

г*) Докажите гипотезу методом математической индукции.