

## Боремся с неравенствами

▷ Как сравнить два больших числа? Например,  $31^{11}$  и  $17^{14}$ . Заметим, что  $31 < 32 = 2^5$ , а  $17 > 16 = 2^4$ . Тогда  $31^{11} < 2^{55} < 2^{56} < 17^{14}$ . Нам повезло, что оба числа можно оценить степенью двойки, а степени двойки между собой легко сравнивать. Используя данный приём, решите следующие задачи:

**Задача 1.** Сравните числа а)  $3^{10}$  и  $129^3$ , б)  $2^{300}$  и  $3^{200}$ , в)  $2^{40}$  и  $3^{28}$ , г\*)  $9^{81}$ ;  $8^{82}$ .

**Задача 2.** Что больше,  $11^9$  или  $6^{16}$ ?

**Задача 3\*.** Сравните числа а)  $3^{100}$  и  $4^{79}$ , б)  $3^{100}$  и  $4^{80}$ , в)  $e^\pi$  и  $\pi^e$ .

**Задача 4.** Докажите, что  $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$ .

**Задача 5.** Сравните  $20202019 * 20202021$  и  $20202020^2$ .

**Задача 6.** Какое число больше:

$$\frac{20202019}{20202021} \text{ или } \frac{20202020}{20202022}?$$

## Неравенство Коши

▷ **Наблюдение:**  $x^2 \geq 0$

**Задача 7.** Используя наблюдение, докажите главное математическое неравенство  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  для всех  $a, b \geq 0$ .

▷ Выражение  $\frac{a+b}{2}$  называют средним арифметическим, а выражение  $\sqrt{ab}$  - средним геометрическим.

**Задача 8.** Докажите, что  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  при  $x > 0$ . А что будет при  $x < 0$ ?

**Задача 9.** Докажите следующие неравенства: а)  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

б)  $8(x^4 + y^4) \geq (x + y)^4$

в)  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

**Задача 10.** Приведите контрпример к следующим утверждениям:

1.  $a < b \Rightarrow ac < bc$

2.  $a \neq b, b \neq c \Rightarrow a \neq c$

3.  $a < b > c \Rightarrow a < c$

4.  $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$