

## Неравенство Коши... старое

▷ **Наблюдение:**  $x^2 \geq 0$

**Задача 1.** Используя наблюдение, докажите главное математическое неравенство  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  для всех  $a, b \geq 0$ .

▷ Выражение  $\frac{a+b}{2}$  называют средним арифметическим, а выражение  $\sqrt{ab}$  - средним геометрическим.

**Задача 2.** Докажите, что  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  при  $x > 0$ . А что будет при  $x < 0$ ?

**Задача 3.** Докажите следующие неравенства:

1.  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

2.  $8(x^4 + y^4) \geq (x + y)^4$

3.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

**Задача 4.** Приведите контрпример к следующим утверждениям:

1.  $a < b \Rightarrow ac < bc$

2.  $a \neq b, b \neq c \Rightarrow a \neq c$

3.  $a < b > c \Rightarrow a < c$

4.  $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

## ... и новое!

**Задача 5.** Докажите, что если  $a > 0, b > 0, c > 0$  и  $ab + bc + ca \geq 12$ , то  $a + b + c \geq 6$ .

**Задача 6.** Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 10. Найдите а) наибольшее и б) наименьшее значение длины гипотенузы.

**Задача 7.** У продавца имеются чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем - на другой и берёт средний вес. Не обманывает ли он?

