

Неравенство Коши... старое

▷ **Наблюдение:** $x^2 \geq 0$

Задача 1. Используя наблюдение, докажите главное математическое неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ для всех $a, b \geq 0$.

▷ Выражение $\frac{a+b}{2}$ называют средним арифметическим, а выражение \sqrt{ab} - средним геометрическим.

Задача 2. Докажите, что $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$. А что будет при $x < 0$?

Задача 3. Докажите следующие неравенства:

1. $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

2. $8(x^4 + y^4) \geq (x + y)^4$

3. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

Задача 4. Приведите контрпример к следующим утверждениям:

1. $a < b \Rightarrow ac < bc$

2. $a \neq b, b \neq c \Rightarrow a \neq c$

3. $a < b > c \Rightarrow a < c$

4. $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

... и новое!

Задача 5. Докажите, что если $a > 0, b > 0, c > 0$ и $ab + bc + ca \geq 12$, то $a + b + c \geq 6$.

Задача 6. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 10. Найдите а) наибольшее и б) наименьшее значение длины гипотенузы.

Задача 7. У продавца имеются чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем – на другой и берёт средний вес. Не обманывает ли он?

