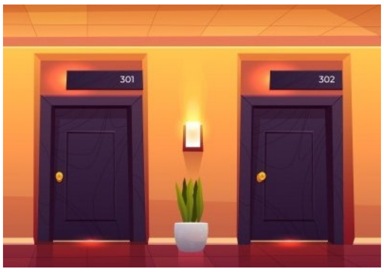
Волшебный отель

Задача 0. В бесконечном отеле есть комнаты под номерами $1, 2, 3, \ldots$ и так далее. Сейчас они все заняты постояльцами. Выяснилось, что скоро приезжает известный ученый, которому необходимо выделить свободную комнату. На следующей неделе приедет проверка из столицы, поэтому владельцу отеля, Волшебнику, срочно нужно сделать так, чтобы все гости были довольны и никого не нужно было бы просить покинуть отель. Как ему это сделать?

▷ Волшебник не растерялся и попросил всех постояльцев всего лишь переехать в комнату, номер которой на единицу больше номера их текущей комнаты. Тем самым постоялец из комнаты n должен переехать в комнату с номером $n+1$. Вся процедура была завершена буквально за час, на следующий день известный ученый поселился в свободную комнату с номером 1, а проверка из столицы прошла успешно.



Задача 1. Появились новости о том, что скоро в отель приезжает 100 человек, но отель уже заполнен! Получится ли у Волшебника поселить их (каждого человека в отдельную комнату), не заставляя никого уезжать из отеля?

Задача 2. На следующей неделе в отель (пока что он пустой) приезжает бесконечный автобус школьников, за каждым из которых закреплён его посадочный номер n: есть школьник на первом сиденье, на втором, и так далее. Помогите Волшебнику поселить всех школьников в отеле.

Задача 3. Скоро в отель приезжает 100 бесконечных автобусов со школьниками! За каждым школьником закреплён номер M его автобуса и номер n его посадочного сиденья в автобусе M. Помогите Волшебнику заселить всех школьников в отель.

Задача 4. Беда! В отель приезжает бесконечное число автобусов, в каждом из которых сидит бесконечное число школьников! Сможет ли Волшебник заселить их всех в свой отель?

Задача 5. Скоро в отель приезжают математики. За ними не закреплено никакое место в автобусе, зато у каждого из них есть уникальная любимая несократимая дробь вида $\frac{n}{m}$, где $n, m \in N$ (то есть, положительное рациональное число), причем каждой такой дроби соответствует некоторый (уникальный) математик, — именно на эти уникальные дроби и ориентируется Волшебник. Сможет ли он поселить всех математиков в свой отель?

Волшебный отель (продолжение)

Задача 6. В отель приехали любители теории графов. *Графом* мы называем конечное множество вершин V, для которого указано, какие пары вершин $(u, v), u, v \in V$, соединяются между собой ребром. Все ребра образуют множество E, граф задаётся парой (V, E). У каждого любителя теории графов есть уникальный граф, вершины которого занумерованы какими–то натуральными числами, причём каждый такой граф соответствует некоторому человеку. Сможет ли Волшебник поселить любителей теории графов в своём отеле?

Задача 7. В отель приехали лингвисты. У каждого лингвиста есть уникальное любимое слово из букв русского алфавита, причем каждое такое слово соответствует некоторому лингвисту. Сможет ли Волшебник поселить в отеле всех лингвистов?

Задача 8. В отель приехали более продвинутые лингвисты. Их уникальные любимые слова составлены из букв бесконечного межгалактического алфавита. Для восприятия сложной структуры получающегося языка разрешается представлять себе, что каждая буква этого алфавита кодируется некоторым натуральным числом. Тем самым можно сказать, что, например, 1 96 12 3 является словом языка. Сможет ли Волшебник заселить в свой отель всех продвинутых лингвистов?

Задача 9. На следующей неделе в отель приезжает группа из бесконечного числа программистов. Каждый из них имеет уникальный любимый двоичный код из бесконечного числа нулей и единиц. Например, есть программист с любимым кодом 010101... и программист с кодом 110110110..., и каждому коду соответствует некоторый программист. Сможет ли Волшебник заселить всех программистов в свой отель?