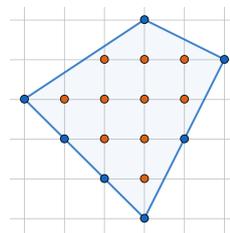


Формула Пика

Теорема (Формула Пика). Пусть вершины многоугольника расположены в узлах сетки, причём внутри него лежит n узлов сетки, а на границе m узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $n + \frac{m}{2} - 1$.

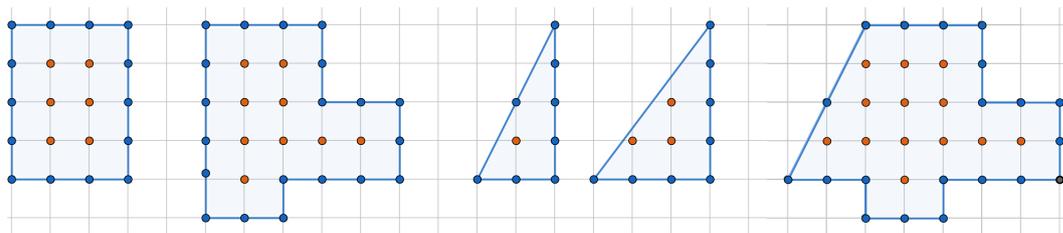


Задача 1. Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

Задача 2. Докажите формулу Пика для многоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

Задача 3. Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами на линиях сетки.

Задача 4. Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для каждого из которых формула Пика уже доказана.



Задача 5. Нарисуйте квадрат площади а) 2; б) 5 с вершинами в узлах сетки.

Задача 6. Шахматный король обошёл доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз, и последним ходом вернулся на исходное поле. Ломаная, последовательно соединяющая центры полей, не имеет самопересечений.

а) Нарисуйте пример такой ломаной.

б) Какую наибольшую длину может иметь эта ломанная?

в) Какую площадь может ограничивать такая ломаная? Зависит ли эта площадь от того, как именно ходил король?

Задача 7. Янат хочет провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая проходила бы через все узлы, лежащие внутри прямоугольника размером $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q у неё это получится, а при каких — нет?

б) Какую длину будет иметь такая ломаная?

в) Какую площадь будет ограничивать такая ломаная?