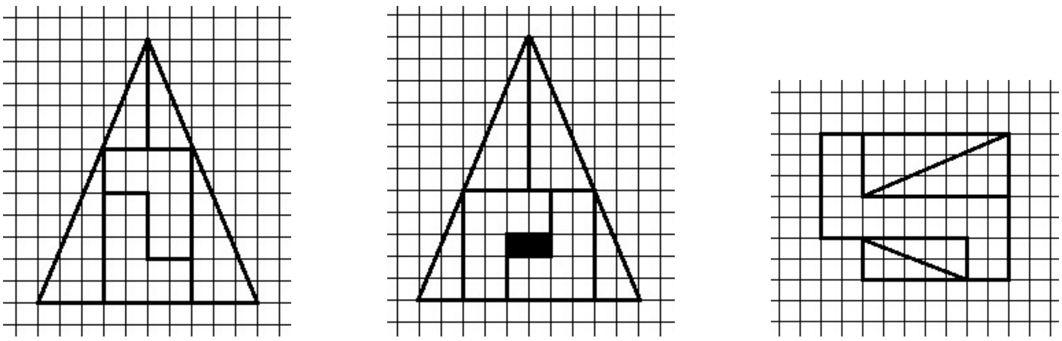
Псевдария

▷ Великий греческий геометр Евклид написал работу под названием Псевдария *(Pseudaria)*, в которой изложил различные виды ложных рассуждений, с которыми часто сталкиваются начинающие изучать геометрию. К сожалению, эта работа не дошла до нас; тем не менее, в честь 1 апреля мы предлагаем найти ошибки в следующих рассуждениях.

Задача 1 (ещё один признак равенства треугольников?). Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, а высота AH треугольника ABC, опущенная из вершины A, равна высоте A_1H_1 треугольника $A_1B_1C_1$, опущенной из вершины A_1, то треугольники равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники AHB и $A_1H_1B_1$ равны по катету и гипотенузе. Треугольники AHC и треугольники $A_1H_1C_1$ тоже равны по катету и гипотенузе, а это означает, что $BC = BH + CH$, $B_1C_1 = B_1H_1 + C_1H_1$, и тогда $BC = B_1C_1$, и исходные треугольники равны по трем сторонам.

Задача 2. Площадь левого треугольника равна 60 клеткам. В центре изображен тот же треугольник, состоящий из тех же составных частей, но две клетки оказываются лишними (то есть, площадь равна 58 клеток), а на третьем рисунке площадь фигуры, составленной из тех же частей, равна 59 клеток. Что не так?



Задача 3. Углы 89° и 90° равны.

Доказательство. Возьмём произвольный отрезок , от точек и B по одну сторону от отрезка отложим лучи, образующие углы в 89° и 90° соответственно. На этих лучах выберем такие точки C и D, что $AD = BC$.

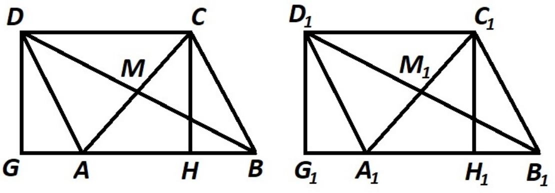
Проведем серединные перпендикуляры к отрезкам CD и AB. Прямые AB и CD не параллельны, поэтому серединные перпендикуляры пересекаются, назовём точку пересечения M. Заметим, что $MC = MD$, $MA = MB$ по построению точки M (каждая точка на серединном перпендикуляре к отрезку равноудалена от его концов). Это означает, что $\angle MAB = \angle MBA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Кроме того, треугольники MAD и MBC равны по трем сторонам ($AD = BC$ по построению). Тогда $\angle MAB = \angle MBC$, и

$$89° = \angle MAB + \angle MAD = \angle MBA + \angle MBC = 90°.$$

Псевдария (продолжение)

Задача 4 (и ещё один признак равенства треугольников?). Докажите, что если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, равны высоты CH и C_1H_1 и равны медианы BM и B_1M_1, то такие треугольники равны.

Доказательство.



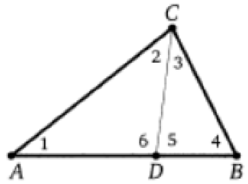
Продолжим медианы BM и B_1M_1 за точки M и M_1 соответственно и отложим отрезки $MD = BM$ и $M_1D_1 = B_1M_1$ *(см. рис.)*. Получим параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Из вершин D и D_1 опустим перпендикуляры DG и D_1G_1 на прямые AB и A_1B_1 соответственно. Тогда $DG = CH = C_1H_1 = D_1G_1$, значит, равны прямоугольные треугольники BDG и $B_1D_1G_1$ (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle DBG = \angle D_1B_1G_1$.

Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$). Тогда $AM = A_1M_1$ и $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$. Из равенства отрезков AM и A_1M_1 следует, что $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

▷ В следующей задаче условие вполне правильное, а вот доказательство содержит ошибку. Какую?

Задача 5. Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство. Проведём в треугольнике ABC отрезок CD и обозначим углы цифрами, как на рисунке.



Пусть сумма углов треугольника равна x, тогда

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = \angle x, \quad \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle x.$$

Складывая эти равенства, получим, что

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 \angle 6 = 2x.$$

Поскольку $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ — это в точности сумма углов треугольника ABC, а сумма смежных углов $\angle 5 + \angle 6 = 180°$, получаем, что $x + 180° = 2x$, откуда $x = 180°$.